

---

## МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ, СТІЙКОСТІ Й РІВНОВАГИ

Модели и методы экономической динамики, устойчивости и равновесия  
Models and methods of economic dynamics, stability and equilibrium

---

УДК 330.45:658.589

*І.М. Ляшенко*

*д-р. фіз.-мат. наук, проф.*

*Ю.П. Тадеєв*

*канд. екон. наук., доц.*

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

### ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ КАПІТАЛ В МОДЕЛЯХ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ

**Вступ.** Темпи довгострокового економічного зростання відіграють ключову роль при формуванні рівня життя суспільства. Високі темпи зростання є незамінним механізмом подолання бідності, що є однією з основних глобальних проблем людства.

Причини економічного зростання є головним предметом дослідження економічної науки з самого початку її існування. Економіко-математичне моделювання, у свою чергу, є потужним інструментом при розв'язанні цієї проблеми.

В економічній та економіко-математичній літературі найбільш відомими та вивченими є неокласичні моделі економічного зростання, які описують економічне зростання у агрегованій замкненій економіці. Першою класичною роботою в рамках даної теорії є модель Рамсея (Ramsey) [1], яка була удосконалена у роботах Касса (Kass) [2] та Купманса (Koopmans) [3].

Виділимо також роботи Харрода (Harrod), Домара (Domar), Солоу (Solow), Свона (Swan), Ромера (Romer), Лукаса (Lucas), які досить детально описані у монографії [4]. Проте недостатньо вивченим залишається питання врахування інтелектуальної складової людського капіталу в моделях економічного зростання, чому і присвячена дана робота.

«Традиційні фактори виробництва – земля, праця і капітал, – не зникли. Але вони відійшли на другий план. Знання стає єдиним значущим ресурсом». Ці слова відомого фахівця у галузі менеджменту П. Друкера (P. Drucker) [5] яскраво підкреслюють актуальність обраної теми дослідження.

Те, що інновації (як продукт інтелектуального капіталу) є не тільки важливим явищем, але й є рушійною силою економічного зростання економісти припускали вже досить давно. Проривом у даному напрямі була класична робота Солоу [6], у якій було показано, що 87,5 % зростання виробництва у США за період 1909-1949 р. р. пояснюється виключно технологічним прогресом людського капіталу і жодним чином не пов'язані зі змінами фізичного капіталу. Інновації та нематеріальні активи на даний час є важливими факторами економічного зростання. Довготривале зростання у неокласичних моделях пояснюється не зростанням населення, а накопиченням інтелектуального капіталу (знання).

**Постановка завдання.** Як відомо, традиційними ресурсами, що розглядаються на макроекономічному рівні, є капітал та праця. В сучасному світі, коли інтелектуальна праця відіграє важливу, а може навіть і вирішальну роль, ресурс «праця» амортизується та інвестується. Тому разом з виробничим капіталом необхідно розглядати інтелектуальний капітал, який може вимірюватись в одиницях простої праці.

Метою статті є побудова та дослідження загальної концептуальної моделі оптимального економічного зростання, що враховує ІК в трьох його проявах (технологічний ІК, людський ІК та організаційний ІК).

Основою моделі оптимального економічного зростання є неокласична виробнича функція

$$Y = F(K, L), \quad (1)$$

яка характеризує технічно ефективні можливості виробництва  $Y(t)$  в залежності від обсягів фізичного капіталу  $K(t)$  та витрат праці  $L(t)$ .

Виробнича функція неокласична, якщо вона володіє такими властивостями:

Стала ефективність від зростання масштабу виробництва:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ для всіх } \lambda > 0;$$

Додатня та зменшуюча віддача ресурсів:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0;$$

Умови Інади [7]:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty; \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0;$$

Істотність:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

З перших трьох властивостей випливає, що випуск прямує до нескінченності при прямуванні будь-якого з ресурсів до нескінченності [4].

В неокласичній виробничій функції можна перейти до змінних в розрахунку на душу населення:

$$Y = F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k)$$

де  $k = \frac{K}{L}$  – капітал на одного працівника,  $y = \frac{Y}{L}$  – випуск на одного працівника, а функція  $f(k) = F(k, 1)$ . Таким чином, неокласична виробнича функція може бути записана в інтенсивній формі

$$y = f(k)$$

Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k), \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - kf'(k);$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

В конкурентній економіці капітал і праця оплачуються граничними продуктами, тобто граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди  $R$ , а граничний продукт праці дорівнює ставці заробітної плати  $w$ :

$$R = f'(k), \quad w = f(k) - kf'(k).$$

Інтелектуальний капітал (ІК) в детальному розумінні розглядається в трьох проявах [8]:

технологічний ІК, що на основі новітніх технологій, нових технологічних проектів дає можливість підвищити продуктивність існуючого фізичного капіталу, немов би збільшуючи його кількість на деяку додаткову (адитивну) частину, яка в такому випадку вимірюється як додаткова (інтелектуальна) частина фізичного капіталу  $H_K \geq 0$ ;

людський ІК, що на основі нових професійних навичок, передового досвіду, комп'ютерних знань дає можливість підвищити продуктивність існуючого людського капіталу (праці), немов би збільшуючи його кількість на деяку додаткову (адитивну) частину, яка в такому випадку вимірюється як додаткова (інтелектуальна) частина простої праці  $H_L \geq 0$ ;

організаційний ІК, що на основі реклами, нової організації виробництва, співпраці з споживачами виробленої продукції дає можливість підвищити попит на продукцію існуючого виробництва і, таким чином, стимулювати розширення виробництва, немов би збільшуючи його продуктивність на деякий додатний множник (більший за одиницю), який в цьому випадку вимірюється як додаткова (інтелектуальна) мультиплікативна частина нейтрального ендегенного прогресу  $A(H_0) \geq 1$ .

Тоді виробнича функція буде представлятися у вигляді

$$Y = A(H_0)F(K + H_K, L + H_L), \quad (2)$$

де  $H_0$  – організаційний ІК, що описується диференціальним рівнянням капітального зростання

$$\dot{H}_0 = \alpha I_{H_0} - \delta H_0, \quad H_0(0) = H_0^0, \quad (3)$$

$I_{H_0} \geq 0$  – інвестиції в організаційний капітал,  $\alpha$  – коефіцієнт віддачі інвестицій в організаційний капітал,  $\delta$  – коефіцієнт амортизації,  $A(H_0)$  – мультиплікатор організаційного ІК, що володіє властивостями

$$A(0) = 1, \quad A(H_0) \geq 1, \quad A'(H_0) > 0, \quad A''(H_0) < 0; \quad (4)$$

$H_K$  – технологічний ІК, що описується диференціальним рівнянням капітального зростання

$$\dot{H}_K = \beta I_{H_K} - \delta H_K, \quad H_K(0) = H_K^0, \quad (5)$$

$I_{H_K} \geq 0$  – інвестиції в технологічний ІК,  $\beta$  – коефіцієнт віддачі інвестицій в технологічний капітал,  $H_L$  – людський ІК, що описується диференціальним рівнянням капітального зростання

$$\dot{H}_L = \gamma I_{H_L} - \delta H_L, \quad H_L(0) = H_L^0, \quad (6)$$

$I_{H_L} \geq 0$  – інвестиції в людський ІК,  $\gamma$  – коефіцієнт віддачі інвестицій в людський капітал.

Для простоти будемо вважати, що у виробничій функції (2) величини фізичного капіталу  $K$  та трудових ресурсів  $L$  є заданими сталими величинами:

$$K(t) = K(0), \quad L(t) = L(0). \quad (7)$$

Тоді замість виробничої функції (2) будемо мати таку функцію

$$Y = A(H_0)F(K(0) + H_K, L(0) + H_L), \quad (8)$$

де  $H_0, H_K$  та  $H_L$  описуються співвідношеннями (3), (5) та (6).

Позначимо суму фізичного капіталу та технологічного ІК як ефективний фізичний капітал

$$\tilde{K} = K_0 + H_K, \quad (9)$$

а суму трудових ресурсів та людського ІК як ефективний людський капітал

$$\tilde{L} = L_0 + H_L. \quad (10)$$

Для формулювання задачі оптимального економічного зростання трьох видів інтелектуального капіталу до вищезазначених співвідношень додається критерій оптимальності, що є інтегралом функції корисності споживання

$$U = \int_0^{\infty} u(C) e^{-\rho t} dt, \quad \rho > 0, \quad (11)$$

та бюджетне обмеження

$$Y = C + I_{H_0} + I_{H_K} + I_{H_L}. \quad (12)$$

В результаті отримуємо таку модель

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} u(C) e^{-\rho t} dt \rightarrow \max, \\ Y &= A(H_0) F(K(0) + H_K, L(0) + H_L), \\ \dot{H}_0 &= \alpha I_{H_0} - \delta H_0, \quad H_0(0) = H_0^0, \\ \dot{H}_K &= \beta I_{H_K} - \delta H_K, \quad H_K(0) = H_K^0, \\ \dot{H}_L &= \gamma I_{H_L} - \delta H_L, \quad H_L(0) = H_L^0, \\ Y &= C + I_{H_0} + I_{H_K} + I_{H_L}, \\ C &\geq 0, \quad I_{H_0} \geq 0, \quad I_{H_K} \geq 0, \quad I_{H_L} \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Зазначимо, що модель (13) як задача оптимального керування може бути досліджена класичними методами теорії оптимального керування, зокрема з використанням принципу максимуму Понтрягіна.

Продемонструємо таке дослідження для спрощеної задачі оптимального керування (13), коли відсутній організаційний інтелектуальний капітал ( $H_0 = 0$ ), а інтегральна функція корисності споживання будується на основі функції корисності зі сталою міжчасовою еластичністю заміщення

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0. \quad (14)$$

Задачу оптимального керування

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \rightarrow \max, \\ Y &= F(K(0) + H_K, L(0) + H_L), \\ \dot{H}_K &= \beta I_{H_K} - \delta H_K, \quad H_K(0) = H_K^0, \\ \dot{H}_L &= \gamma I_{H_L} - \delta H_L, \quad H_L(0) = H_L^0, \\ Y &= C + I_{H_K} + I_{H_L}, \\ C &\geq 0, \quad I_{H_K} \geq 0, \quad I_{H_L} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

будемо розв'язувати використовуючи принцип максимуму Понтрягіна. Для цього складемо гамільтоніан

$$J = u(C)e^{-\rho t} + \mu(\beta I_{H_K} - \delta H_K) + \nu(\gamma I_{H_L} - \delta H_L) + \omega(F(K(0) + H_K, L(0) + H_L) - C - I_{H_K} - I_{H_L}) \quad (16)$$

де  $\mu$  та  $\nu$  – тіньові ціни, пов'язані з  $H_K$  та  $H_L$  відповідно, а  $\omega$  – множник Лагранжа, пов'язаний з бюджетним обмеженням. Відмітимо при цьому, що обмеження невід'ємності валових інвестицій  $I_{H_K} \geq 0, I_{H_L} \geq 0$  ми поки-що не враховуємо.

Необхідні умови оптимальності першого порядку мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C} = 0 &\Rightarrow u'(C)e^{-\rho t} = \omega, \\ \frac{\partial J}{\partial I_{H_K}} = 0 &\Rightarrow \beta\mu = \omega, \\ \frac{\partial J}{\partial I_{H_L}} = 0 &\Rightarrow \gamma\nu = \omega, \\ \dot{\mu} = -\frac{\partial J}{\partial H_K} &\Rightarrow \dot{\mu} = \mu\delta - \omega \frac{\partial F}{\partial H_K}, \\ \dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial H_L} &\Rightarrow \dot{\nu} = \nu\delta - \omega \frac{\partial F}{\partial H_L}. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо

$$\beta \frac{\partial F}{\partial H_K} = \gamma \frac{\partial F}{\partial H_L} \quad (17)$$

Із співвідношення (14) та виразу для змінної  $\omega$  одержуємо

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\theta \frac{\dot{C}}{C} - \rho \quad (18)$$

Введемо допоміжну змінну

$$z = \frac{\tilde{L}}{\tilde{K}} = \frac{L(0) + H_L}{K(0) + H_K} \quad (19)$$

і розглянемо співвідношення (17) як рівняння відносно змінної  $z$ .

З лінійної однорідності виробничої функції  $F(\tilde{K}, \tilde{L})$  випливає, що величини  $\frac{\partial F}{\partial \tilde{K}}$  та  $\frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}$  є однорідними функціями степеня 0, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{K}} = \varphi(z) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \tilde{L}} = \psi(z) > 0$$

Разом з тим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{K}^2} = \varphi'(z) \left( -\frac{\tilde{L}}{\tilde{K}^2} \right) < 0 &\Rightarrow \varphi'(z) > 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{L}^2} = \psi'(z) \frac{1}{\tilde{K}} < 0 &\Rightarrow \psi'(z) < 0. \end{aligned}$$

Використовуючи умови Інади, одержуємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{\tilde{K} \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial \tilde{K}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = \lim_{\tilde{L} \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial \tilde{L}} = \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \lim_{\tilde{K} \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial \tilde{K}} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = \lim_{\tilde{L} \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial \tilde{L}} = 0.$$

Перепишемо тоді рівняння (17) у вигляді

$$\beta\varphi(z) - \gamma\psi(z) = 0. \quad (20)$$

У рівнянні (20) зліва маємо монотонно зростаючу функцію, що при зростанні аргументу  $z$  на інтервалі  $(0, \infty)$  буде зростати від  $-\infty$  до  $\infty$ . В такому випадку очевидно, що рівняння (20) має єдиний додатний розв'язок  $z^* > 0$ . Отже, на оптимальному розв'язку

$$\frac{L(0) + H_L}{K(0) + H_K} = z^* = const > 0 \quad (21)$$

Умова (21) є магістральною траєкторією задачі оптимального керування (15).

Висновок. Таким чином, в роботі запропонована нова концепція побудови моделей оптимального економічного зростання, що враховує три основні фактори: фізичні ресурси, трудові ресурси та інтелектуальний капітал. При цьому інтелектуальний капітал представляється у трьох проявах (технологічний ІК, людський ІК та організаційний ІК). Показано, що для випадку, коли присутній технологічний ІК та людський ІК відповідна задача оптимального керування має єдину магістральну траєкторію.

### Література

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ramsey F. A Mathematical Theory of Savings // Economic Journal. – 1928. – Vol. 38. – №152. – P. 543–559.</li> <li>2. Cass D. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation // Review of Economic Studies. – 1965. – Vol. 32. – P. 233–240.</li> <li>3. Koopmans, T. On the Concept of Optimal Economic Growth // Econometric Approach to Development Planning. Amsterdam: North Holland, 1965.</li> <li>4. Барро Дж. Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин: [пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 824 с.</li> <li>5. Дракер П. Посткапиталистическое общество // Новая постиндустриальная волна на Западе. Антология / Под. ред. В.Л. Иноземцева. М.: Academia, 1999. С. 70–100.</li> <li>6. Solow R. Technical Change and the Aggregate Production Function // Epy Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39. – №3. – P. 312–320.</li> <li>7. Inada K. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. – 1963. – Vol. 30. – №2. – P. 119–127.</li> <li>8. Фитц-енц Я. Рентабельность инвестиций в персонал: измерение экономической ценности персонала / Я. Фитц-енц: [пер. с англ.] – М.: Вершина, 2006. – 320 с.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ramsey F., 1928. A Mathematical Theory of Saving. Economic Journal, 38, December, 543–559.</li> <li>2. Cass D., 1965. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. Review of Economic Studies, 32, July, 233–240.</li> <li>3. Koopmans T.C., 1965. On the Concept of Optimal Economic Growth. In The Econometric Approach to Development Planning. Amsterdam: North Holland, 1965.</li> <li>4. Barro R.J., Sala-i-Martin X., 2004. Economic Growth. Cambridge. Mass.: MIT Press.</li> <li>5. Drucker P.F., 1993. The Post-Capitalist Society. New York: HarperCollins.</li> <li>6. Solow R.M., 1957. Technical Change and the Aggregate Production Function. Review of Economics and Statistics, 39, August, pp. 312–320.</li> <li>7. Inada K.I. 1963. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. Review of Economic Studies, 30, June, 119–127.</li> <li>8. Fitz-enz J., 2009. The ROI of Human Capital: Measuring the Economic Value of Employee Performance. New York: AMACOM.</li> </ol> |
|--|---|