УДК 330.15:316

В.Ю. Хохлов
канд. техн. наук

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ ЗА НОРМОЮ ТРЕЙНОРА

Актуальність теми. При управлінні портфелюми цінних паперів чуже часто виникають задачі збільшити альфу портфелю чи отримати максимальну дохідність при заданому рівні систематичного ризику. Одним з основних положень сучасної портфельної теорії є те, що ринок компенсує інвестора лише за прийнятий ним систематичний ризик. Відповідно, отримання найкращої дохідності з одиниці такого ризику є метою багатьох інвестиційних менеджерів, і розвиток відповідних моделей та математичних методів є актуальною задачею сучасної науки.

Аналіз останніх досліджень. Оптимізація портфелю цінних паперів досліджується у фундаментальних працях таких вчених, як Марковиць, Шарп, Мертон, Трейнор, Блек, Літтерман, Ролл, Джоріон. Більшість дослідників концентрували свою увагу на оптимізації портфелю за співвідношенням дохідності та повного ризику або на оптимізації портфелю за похибкою стеження. Велику практичну цінність представляють ті розробки, які дозволяють накладати обмеження на вагу активів, тому що в іншому випадку аналітичні розв'язки можуть призводити до нездійснених на практиці портфелів з дуже великими довгими та короткими позиціями. Класичний квадратичний алгоритм розв'язку задачі Марковиця, який дозволяє враховувати обмеження на вагу активів, розроблений Шарпом [1]. Іншою важливою розробкою є модель Блека-Літтермана [2], яка розвиває концепцію повного ризику та додає суб'єктивні очікування інвестора до множини вхідних параметрів.

Але, як було вказано вище, інвестори компенсуються за прийнятий ними рівень не повного, а систематичного ризику. Для оцінки успішності управління портфелем у цьому разі використовуються такі показники, як бета, альфа та норма Трейнора [3, 814]. Одна з моделей, які дозволяють закладати очікування інвестора щодо альфи окремих активів як вхідний параметр в оптимізаційний алгоритм, є модель Трейнора-Блека [4]. Ця модель відповідає полуактивній стратегії управління портфелем. Але, незважаючи на використання альфи, тобто врахування рівня систематичного ризику, цільова функція моделі Трейнора-Блека — це норма Шарпа, а не норма Трейнора. Власне, оптимізація портфелю за останнім показником, яка відповідає активній стратегії, не була у фокусі основної маси досліджень.

Мета та завдання дослідження. Метою цього дослідження є розробка інструментарію оптимізації портфелю цінних паперів за співвідношенням дохідності та рівня систематичного ризику. Завдання дослідження: 1) розробити алгоритм оптимізації по нормі Трейнора, 2) виявити властивості моделі та алгоритмі оптимізації, 3) визначити відношення оптимального за нормою Трейнора портфелю та ефективної границі Марковиця,

4) порівняти оптимальний за нормою Трейнора та оптимальний за нормою Шарпа портфелі.

Модель оптимізації за нормою Трейнора.

Портфельні менеджери з Уолл-стріт мають таке прислів'я: «Keep your betas low and your alphas high», тобто держіть у портфелі активи з великими альфами та низькими бетами. Покажемо, що цей критерій є еквівалентним нормі Трейнора, якщо альфу розраховувати як надлишкову дохідність понад очікуваною дохідністю за моделлю CAPM:

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p}=\frac{r_p-E\left(r_p\right)}{\beta_p}=\frac{r_p-r_f-\beta_p\left(r_m-r_f\right)}{\beta_p}=\frac{r_p-r_f}{\beta_p}-\left(r_m-r_f\right),$$

де α_p,β_p — відповідно альфа та бета портфелю, rf — безризикова процентна ставка, rm — дохідність ринкового портфелю. Оскільки (rm – rf) є значенням, що не залежить від портфелю, то співвідношення α_p/β_p буде визначатися саме нормою Трейнора.

Оптимізація портфелю цінних паперів за нормою Трейнора полягає у знаходженні таких значень ваги активів w1, w2, …, wn, які максимізують цільову функцію:

$$f_{Tr}\left(w_1,...,w_n\right)=\frac{r_p-r_f}{\beta_p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}r_iw_i-r_f}{\sum_{i=1}^{n}\beta_iw_i}\rightarrow\max, \qquad (1)$$

де r_i — дохідність i–го активу (очікувана дохідність в ex-ante моделі); r_p — дохідність портфелю; β_i — бета-коефіцієнт i–го активу; β_p — бета-коефіцієнт портфелю; r_f — безризикова процентна ставка; w_i — вага i–го активу у портфелі, за наявності обмежень

$$\sum_i w_i=1, \qquad (2)$$

$$w_i^{\min}\le w_i\le w_i^{\max},\ i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Ця задача є задачею нелінійного програмування, а її розв'язок у загальному випадку є досить складним. Але можна зауважити, що норма Трейнора є концептуально подібною до норми Шарпа, а для оптимізації портфелю за цією нормою було розроблено квадратичний алгоритм [5], що базується на оригінальному алгоритмі Шарпа. У даній статті пропонується модифікація цього алгоритму, яка дозволяє проводити оптимізацію за нормою Трейнора.

Важливою особливістю алгоритму оптимізації за нормою Шарпа є використання на кожній ітерації функції маржинальної корисності, яка є частковою похідною цільової функції за вагою i–го активу. Відповідна часткова похідна норми Трейнора такий вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{r_p-r_f}{\beta_p}\right)=\frac{1}{\beta_p}\frac{\partial r_p}{\partial w_i}+\left(r_p-r_f\right)\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\beta_p\right)^{-1}=\frac{1}{\beta_p}\frac{\partial r_p}{\partial w_i}-\frac{r_p-r_f}{\beta_p^2}\frac{\partial\beta_p}{\partial w_i}=$$

$$=\frac{r_i}{\beta_p}-\frac{r_p-r_f}{\beta_p^2}\beta_i=\frac{1}{\beta_p}\left(r_i-\frac{r_p-r_f}{\beta_p}\beta_i\right).$$

Оскільки для в алгоритмі оптимізації ми лише порівнюємо маржинальні корисності активів, то спільним множником масштабу можна знехтувати, тому при оптимізації за нормою Трейнора можна використовувати таку функцію маржинальної корисності:

$$MU_i=r_i-\frac{r_p-r_f}{\beta_p}\beta_i. \qquad (4)$$

При такій модифікації алгоритму він не потребує знання коваріаційної матриці, тому оптимальний шаг зміни ваги активів буде визначатися лише обмеженнями на максимальну та мінімальну вагу активів, які додаються чи забираються з портфелю.

Алгоритм оптимізації за нормою Трейнора.

Алгоритм оптимізації за нормою Трейнора має такі вхідні параметри:

$\mathbf{w}^{(0)} = \left\{ w_i^{(0)} \right\}, i = \overline{1,n}$ — початковий розв'язок, що задовольняє умовам (2)-(3);

$\mathbf{r} = \left\{ r_i \right\}$ — вектор очікуваних дохідностей;

$\mathbf{B} = \left\{ \beta_i \right\}$ — вектор бета-коефіцієнтів;

r_f — безризикова ставка відсотка;

$\left\{ w_i^{\min} \right\}, \left\{ w_i^{\max} \right\}, i = \overline{1,n}$ — нижня та верхня границя ваги окремих активів у (3).

Алгоритм має кінцеву кількість ітерацій $k = 0,1,2,\ldots$, кожна з яких складається з наступних кроків:

Розраховується очікувана дохідність та бета портфелю виходячи з поточних значень вагових коефіцієнтів.

Розраховуються маржинальні корисності активів за формулою (4).

Обираються два активи, ваги яких змінюються. При цьому збільшується вага активу з найбільшою маржинальною корисністю, вагу якого ми можемо збільшити у портфелі, та зменшується вага активу з найменшою маржинальною корисністю, вагу якого ми можемо зменшити у портфелі. Якщо один з цих активів неможливо визначити, то алгоритм припиняється.:

$$i_{add} : MU_{i_{add}} = \max_i \left\{ MU_i \left| w_i^{(k)} < w_i^{\max} \right. \right\},$$
$$i_{sub} : MU_{i_{sub}} = \min_i \left\{ MU_i \left| w_i^{(k)} > w_i^{\min} \right. \right\}.$$

Розраховується ефект від зміни ваг активів:

$$\Delta MU = MU_{i_{\text{add}}} - MU_{i_{\text{sub}}}$$

Якщо величина ефекту менша за поріг оптимізації, алгоритм припиняється.

Розраховується оптимальний можливий розмір зміни ваги двох активів:

$$\Delta w = \min\left\{ w_{i_{\text{add}}}^{\max} - w_{i_{\text{add}}}^{(k)}, w_{i_{\text{sub}}}^{(k)} - w_{i_{\text{sub}}}^{\min} \right\}$$

Розраховуються нові ваги активів у портфелі, після чого переходимо на наступну ітерацію:

$$w_i^{(k+1)} = \begin{cases} w_i^{(k)} + \Delta w, i = i_{\text{add}}, \\ w_i^{(k)} - \Delta w, i = i_{\text{sub}}, \\ w_i^{(k)}, \textit{у іншому випадку}. \end{cases}$$

Запропонований алгоритм дуже простий у реалізації та відрізняється від алгоритму Шарпа лише іншою формулою для підрахунку маржинальної корисності (кроки 1–2) та має дещо інше значення розміру зміни ваги активів на кроці 6.

Важливою особливістю цього алгоритму є те, що він не використовує коваріаційну матрицю. На відміну від алгоритму Шарпа, функція маржинальної корисності тут не залежить від ваги інших активів, тобто від квадратичного характеру алгоритму ми перейшли до лінійного. Якщо це дійсно так, то ті результати, які повинен давати алгоритм, мають бути подібними до результатів симплекс-методу, тобто оптимальні рішення повинні знаходитися у кутах опуклого багатогранника. Перевіримо це на оптимізації реальних портфелів.

Оптимальні за нормою Трейнора портфелі.

Для перевірки розробленого алгоритму розрахуємо оптимальні за нормою Трейнора портфелі з компонентів індексу Standard & Poor's 100 (S&P 100) по ціновим даним за

2011 рік. Джерело використаних даних — Yahoo Finance, при цьому використані ціни активів, скореговані на корпоративні події (виплату дивідендів, розділення акцій). У якості вектора $r = \{r_i\}$ візьмемо вектор фактичних річних дохідностей (оскільки дохідності за 2011 рік відомі, немає потреби використовувати математичне очікування), значення бета-коефіцієнтів розраховані за допомогою лінійної регресії відносно дохідності індексу S&P 500. Безризикова річна ставка відсотку станом на 31 грудня 2010 року становила 0.29%. Оптимальні за нормою Трейнора портфелі, які були знайдені запропонованим вище алгоритмом, для різних значень максимальної ваги окремого активу у портфелі, наведені у табл 1.

Таблиця 1

Оптимальні за нормою Трейнора портфелі з компонентів S&P 100

Макс. вага активу, wmax	5%	10%	20%	30%	100%
Оптимальний портфель	5% AAPL 5% ABT 5% AEP 5% AMGN 5% BMY 5% CL 5% COST 5% HNZ 5% IBM 5% KFT 5% LMT 5% MA 5% MCD 5% MO 5% PFE 5% PM 5% SO 5% UNH 5% VZ 5% WMT	10% ABT 10% BMY 10% CL 10% KFT 10% MA 10% MCD 10% MO 10% PM 10% SO 10% UNH	20% BMY 20% MCD 20% MO 20% PM 20% SO	30% BMY 30% MCD 10% PM 30% SO	100% SO
Дохідність, rp	27.11%	33.99%	33.69%	34.28%	26.93%
Стандартне відхилення, σp	15.73%	16.18%	13.94%	13.68%	13.08%
Бета, βp	0.6347	0.6305	0.5065	0.4907	0.3538
Норма Трейнора	0.4226	0.5345	0.6594	0.6927	0.7530

Оптимальність наведених у табл 1 портфелі була також перевірена за допомогою алгоритму нелінійної оптимізації GRG2 (Generalized Reduced Gradient), який застосовується у Microsoft Excel Solver. Обидва алгоритми видають той же самий оптимальний розв'язок в усіх випадках, але нелінійний алгоритм GRG2 потребує близько 130-160 ітерацій для пошуку оптимального розв'язку при початковому розв'язку $w_i^{(0)} = 1/n, i = \overline{1,n}$, тоді як розроблений алгоритм потребує лише 98-99 ітерацій при такому ж самому початковому розв'язку.

Структура оптимальних портфелів вказує на те, що вони знаходяться у кутах опуклого багатограннику, який у площині дохідність-бета відповідає обмеженням (2)–(3). Це відповідає теоретичному висновку, який було зроблено виходячи з вигляду формули маржинальної корисності (4). Фактично, модель оптимізації по нормі Трейнора можна звести до лінійної моделі, для розв'язку якої застосовний симплекс-метод, але як саме це зробити досі залишається невідомим.

Співвідношення оптимальних за нормами Трейнора та Шарпа портфелів та ефективної границі.

Співвідношення оптимального за нормою Трейнора портфелю (T) з ефективною границею Марковиця та оптимальним за нормою Шарпа портфелем (S) для різних значень максимальної ваги окремного активу у портфелі показано на рис 1. З рис 1 можна зробити висновок про те, що у диверсифікованих портфелюх (wmax << 1) оптимальний за нормою Трейнора портфелю є ефективним по Марковицю. Лише у випадку недиверсифікованого портфелю, у якому фактично був лише один актив, оптимальний за нормою Трейнора портфель не є ефективним та лежить всередині границі, тому що жоден окремий актив, за винятком активу з максимальною дохідністю, не лежить на границі. Те ж саме, ймовірно, буде виконуватися й для портфелю з двох активів, тобто у випадку wmax $\geq$ 0.5. Але те, що у інших випадках оптимальний за нормою Трейнора портфель є оптимальним, є дуже важливим фактом, оскільки його знаходження є значно швидшим за знаходження ефективного портфелю (тому що не потребує знання коваріаційної матриці).

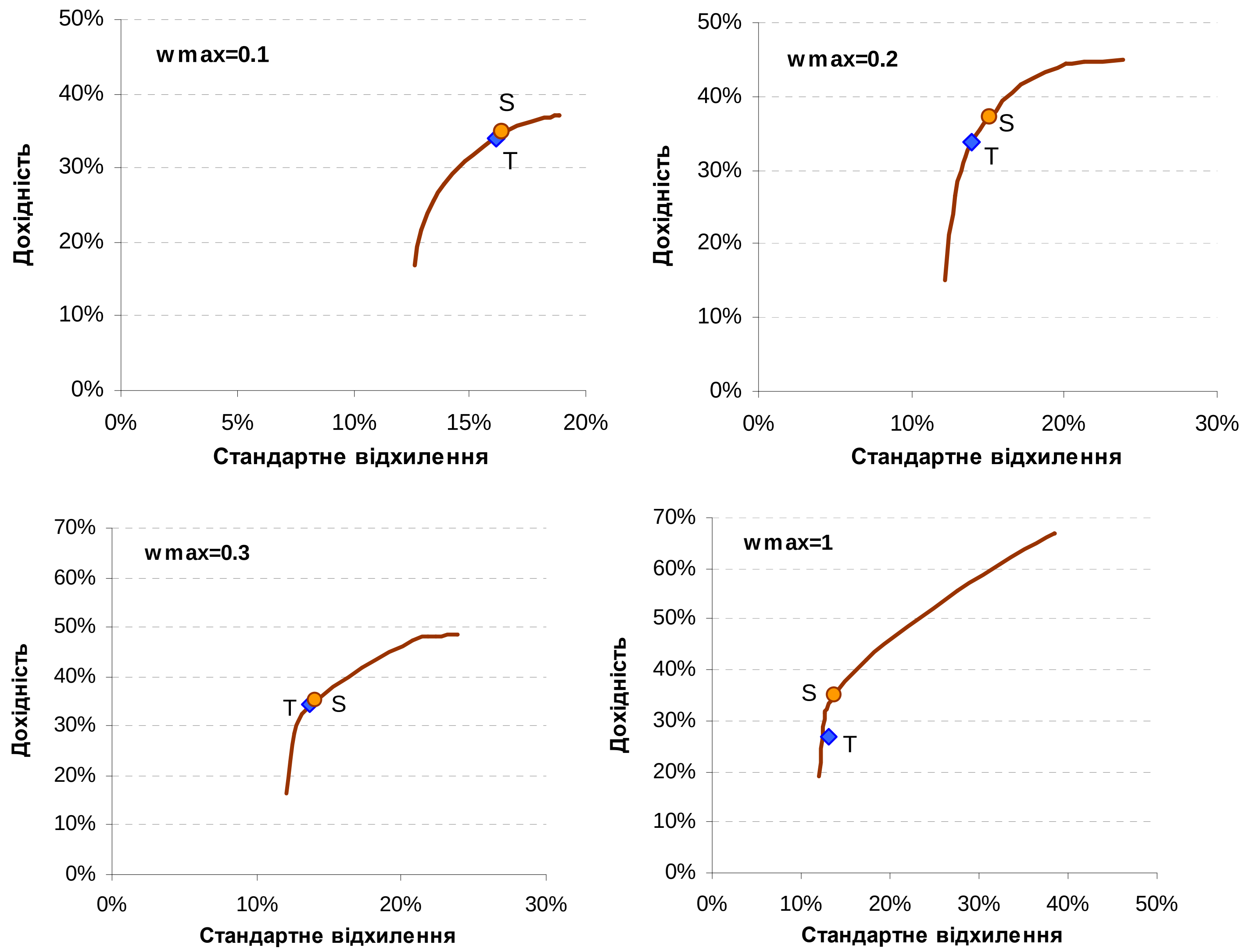

Рис 1. Ефективна границя Марковиця та оптимальні портфелі

Також цікавим є факт того, що в усіх випадках оптимальний за нормою Трейнора портфель був менш дохідним та ризикованим, аніж оптимальний за нормою Шарпа портфель. Поясненням цього може бути те, що норма Трейнора дає винагороду за рівень систематичного ризику, тоді як норма Шарпа — за рівень повного ризику, тобто в останньому випадку портфель може мати більше несистематичного ризику. Але для добре диверсифікованих портфелів, у яких wmax $\leq$ 0.1, різниця між портфелюми, оптимальними за нормою Трейнора та за нормою Шарпа, стає несуттєвою. Цей факт відповідає сучасній портфельній теорії — при збільшенні кількості активів у портфелі завдяки диверсифікації рівень несистематичного ризику зменшується.

Крім ефективної границі Марковиця можна також розглянути ефективну границю портфелів у площині дохідність — рівень систематичного ризику (бета). По аналогії з попередньою, ця границя містить усі портфелі з максимально можливою дохідністю при заданому значенні бети. Для побудови такої границі можна використати або симплекс-метод, або квадратичний алгоритм. Побудована у просторі дохідність-бета ефективна границя, оптимальний за нормою Трейнора портфель (T) та оптимальний за нормою Шарпа портфель (S) показані на рис 2.

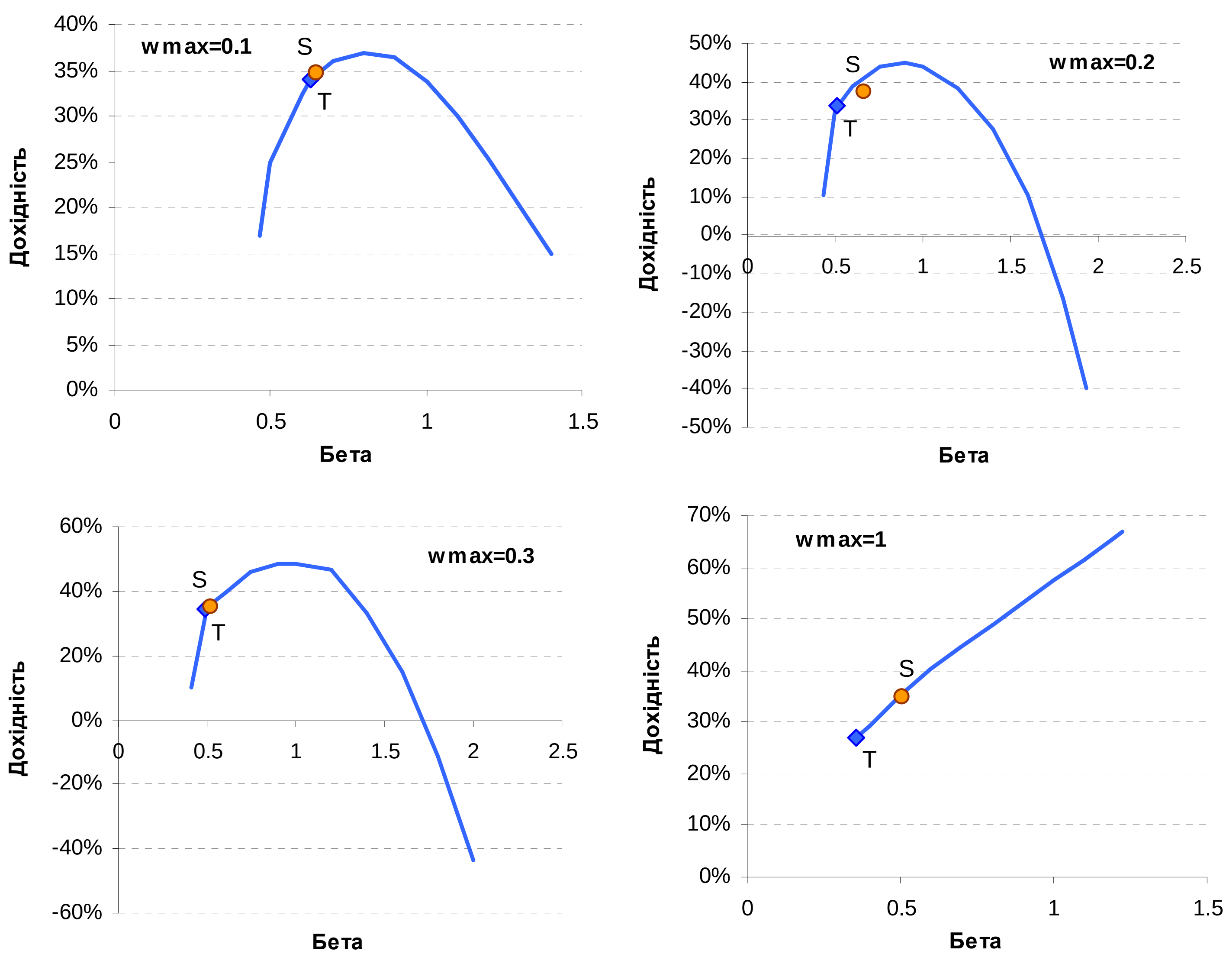

Рис 2. Ефективна границя у просторі дохідність-бета та оптимальні портфелі

Як можна побачити з рис 2, ефективна границя є частиною опуклого багатогранника, який відповідає обмеженням (2)–(3), при чому при збільшенні wmax з 0.1 до 1 кількість граней зменшується. Оптимальний за нормою Трейнора портфель знаходиться в одному з кутів цього багатогранника. Оптимальний за нормою Шарпа портфель у більшості випадків лежить на ефективній границі, але для значення wmax = 0.2 це не відбувається.

Висновки. У статті запропонована модель оптимізації портфелю за нормою Трейнора при наявності обмежень на вагу активів та розроблено відповідний алгоритм. Хоча задача по суті є нелінійною, показано, як можна її розв'язати за допомогою алгоритму Шарпа з деякими модифікаціями. Це призвело до цікавого наслідку — оптимальний по нормі Трейнора портфель повинен завжди знаходитися у куті опуклого багатограннику, який відповідає обмеженням на вагу активів, тобто задачу може бути зведена до лінійної оптимізації, хоча як само це зробити залишається невідомим.

Перевірка роботи алгоритму на прикладі створення оптимальних за нормою Трейнора портфелів з компонентів індексу S&P 100 у 2011 році показує, що алгоритм працює правильно, усі його результати співпадають з результатами еталонного алгоритму нелінійної оптимізації. Більше того, результуючі портфелі дійсно знаходяться у кутах опуклого багатограннику.

Оптимальний за нормою Трейнора портфель лежить на ефективній границі Марковиця або знаходиться біля неї та є зазвичай близьким по параметрам до оптимального за нормою Шарпа портфелю. Відмінності між цими двома портфелюми стають дуже незначними при збільшенні кількості активів у портфелі. Це, як і передбачає сучасна портфельна теорія, відбувається завдяки зменшенню несистематичного ризику портфелю. Таким чином, розроблений алгоритм дозволяє знаходити ефективний або майже ефективний портфель, близький за параметрами до оптимального за нормою Шарпа портфелю, але не потребує знання коваріаційної матриці.

Література

1. Sharpe W. F. An Algorithm for Portfolio Improvement / William F. Sharpe // Advances in Mathematical Programming and Financial Planning / K. D. Lawrence, J.B. Guerard, Jr, and Gary D. Reeves (editors). — JAI Press, Inc., 1987. — P. 155–170.
2. Black F. Global Portfolio Optimization / F. Black, R. Litterman // Financial Analysts Journal. — September 1992. — P. 28–43.
3. Treynor J. L. How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection / Jack L. Treynor, Fischer Black // Journal of Business. — January, 1973. — P. 66–88.
4. Bodie Z. Investments / Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus. — McGraw–Hill/Irwin, 2001. — 1015 p.
5. Хохлов В. Ю. Алгоритм оптимізації портфелю за нормою Шарпа / В. Ю. Хохлов // Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць. — К. : КНЕУ, 2011. — Вип. 85. — С. 200-217.

1. Sharpe, W.F. (1987), *An Algorithm for Portfolio Improvement*, JAI Press, Inc., pp. 155–170.
2. Black, F., Litterman, F. (1992), *"Global Portfolio Optimization"*, Financial Analysts Journal, pp. 28–43.
3. Treynor, J.L., Black, F. (1973), *"How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection"*, Journal of Business, pp. 66–88.
4. Bodie, Z., Kane, A., Marcus A.J. (2001), *Investments*, McGraw–Hill/Irwin.
5. Khokhlov, V.U. (2011), *Portfolio optimization algorithm for norm Sharpe*, Modelling and Information Systems in the economy: Coll. Science works, Kyiv: Kyiv National Economic University, pp. 200-217.