МОДЕЛЮВАННЯ В СИСТЕМАХ МІКРО- І МАКРОЕКОНОМІКИ
Моделирование в системах микро- и макроэкономики
Modeling in micro- and macroeconomic systems

УДК 336.761

Л.А.Власенко
д-р техн.наук, профессор
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Ю.Г.Лысенко
чл.-корр. НАН Украины, д-р экон.наук, профессор
Донецкий национальный университет
А.Г.Руткас
д-р физ.-мат.наук, профессор
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ИНВЕСТИЦИЯХ

В статье исследуются линейные и нелинейные модели динамики производства с учетом внешних импульсных инвестиций в основные производственные фонды предприятий. Анализируются замедление и ускорение темпов роста производства, эффекты стабилизации основных фондов, оптимизация динамики импульсных инвестиций с квадратичным критерием качества.

1. Линейные модели с однофакторной производственной функцией.

Модели автономной динамики предприятия с однофакторной производственной функцией типа Леонтьева обычно базируются на дифференциальном уравнении:

$$r = NR / R, \tag{1}$$

относительно объема $d_{\min} \le d_2 \le d_{\max}$ основных производственных фондов. Постоянный коэффициент $\Delta = 0, if\ r_1 \ge r_2$; $\Delta = 1, if\ r_1 < r_2$ определяется финансовой и технологической структурой (организацией) производства и вычисляется по соответствующей методике [1]. Согласно уравнению (1) для автономно функционирующего предприятия относительная к объему фондов $d_2 = \Delta\{d_2(t-1) + k[r_2(t-1) - r_2(t-2)]\}, k \ge 0$ скорость их изменения $G = \tau R_1 + L$ не зависит от времени и равна числу $G_0 = \tau R$:

$$NG = G - C.$$

Для учета различных факторов, в том числе внешних, уравнение (1) усложняется путем добавления соответствующих слагаемых. Так, при поступлении внешних инвестиций используется уравнение

$$g = 1 - G / G_0, \tag{2}$$

где $c = f(D)$- функция скорости (интенсивности) инвестиций, расходуемых на расширение основных фондов, см. например [1]. Общая сумма инвестиций $d_{\min}$ от начального момента времени $d_{\max}$ до момента $d_{\min} = 0.1, d_{\max} = 0.9$ равна $P = 1.5$. Обычно инвестиции в рассматриваемый период времени $P = 1.5$ поступают импульсно, то есть в объемах c_k в дискретные моменты времени t_k , $k = 1, 2, \ldots$, которые можно упорядочить по возрастанию: $0 < t_1 < t_2 < ... < t_N < T$. Таким образом, c_k можно трактовать как мгновенное приращение основных фондов предприятия в момент t_k вследствие поступившей извне инвестиции. Сумма инвестиций $I(t)$ претерпевает скачок c_k в точке t_k, а между соседними моментами поступлений не меняется:

$$I(t) = const, \quad t_k < t < t_{k+1},$$
$$I(t_k + 0) - I(t_k - 0) = c_k.$$

Следовательно, функция инвестиций $I(t)$ представляется в виде:

$$I(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi(t - t_k),$$

где $\chi(\tau)$ - функция Хэвисайда, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t \geq 0$. Производная функции Хэвисайда есть δ-функция $\delta(\tau)$, сосредоточенная в нуле, поэтому уравнение (2) можно записать в виде классического дифференциального уравнения с импульсными воздействиями:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(t - t_k), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

Характерной особенностью решений таких уравнений является нарушение не только дифференцируемости, но и непрерывности с появлением скачков в точках t_k [2].

Заметим, что амплитуды импульсов c_k в (3) могут быть как положительными (величины разовых инвестиционных поступлений), так и отрицательными (изъятия части основных фондов в связи с износом, модернизацией и т.д.), а также нулевыми. На рис.1 изображены графики инвестиций $I(t)$ и основных фондов $x(t)$ со скачками $c_1,...,c_5$ в моменты времени $t_1,...,t_5$ на интервале наблюдения $0 < t < T$, где отрицательные скачки c_3, c_5 отвечают изъятию части фондов в моменты t_3, t_5 соответственно.

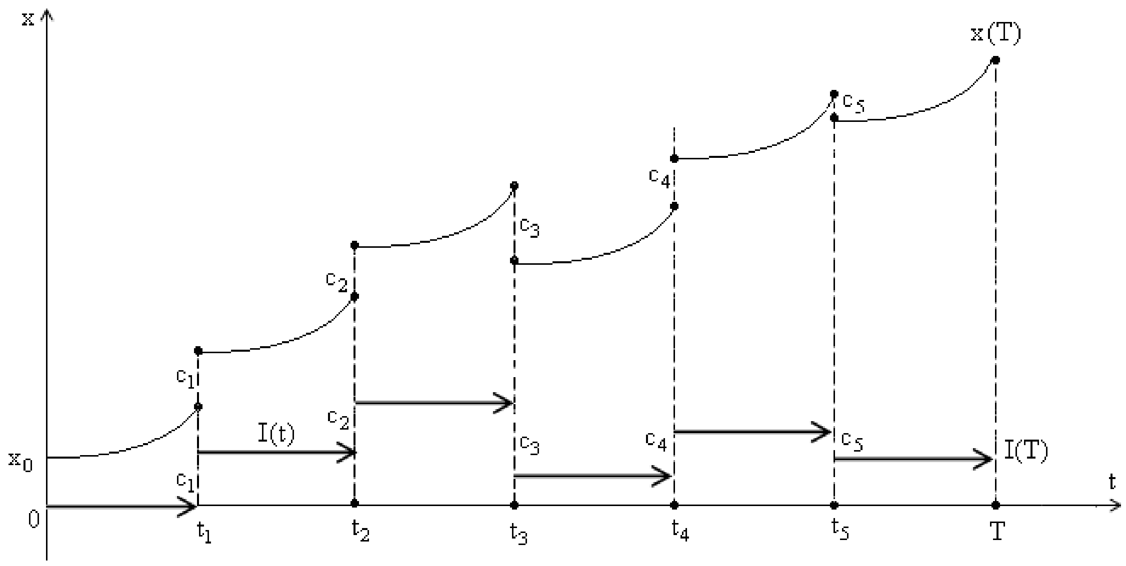

Рис.1. Графики суммарных фондовых инвестиций $I(t)$ за период от 0 до t и основных фондов $x(t)$ в момент времени t

Ступенчатая функция $I(t)$ есть сумма неотрицательной функции $I_+(t)$ внешних инвестиций в фонды за период $[0,t]$ и неположительной функции $I_-(t)$ изъятия фондов за тот же период, (см. рис.2.)

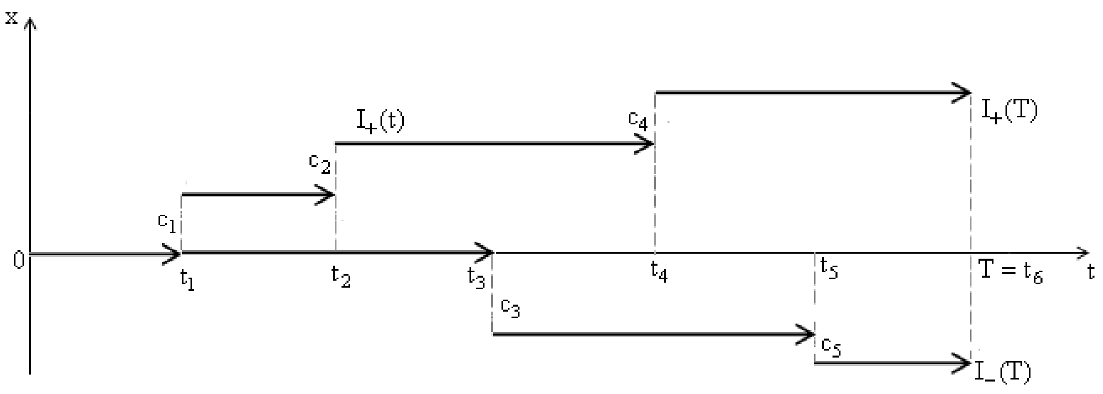

Рис.2. Графики положительных фондовых инвестиций $I_+(t) \geq 0$ *и фондовых изъятий* $I_-(t) \leq 0$ *за период* $[0,T]$

Положим $t_0 = 0$. Решение $x(t)$ импульсного дифференциального уравнения (3) с начальным условием $x(0) = x_0 (> 0)$ можно построить, поочередно решая на полуинтервалах $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0,1,..., N-1$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_k x(t)\,, t_k \leq t < t_{k+1}\,, \\ x(t_k) = x(t_k - 0) + c_k \end{cases} \tag{4}$$

где $x(t_0 - 0) = x_0$, $c_0 = 0$ и $a_k = a$ в соответствии с уравнением (3). Реально же темп роста выпуска и соответственно темп a роста фондов предприятия может изменяться при переходе через момент t_k после импульсной инвестиции c_k. Поэтому естественно рассматривать более общую ситуацию, когда в (4) для каждого интервала $[t_k, t_{k+1}]$ учитывается индивидуальный темп роста a_k основных фондов. Тем самым в уравнении (3) возникает переменный показатель $a = a(t)$(темп роста), являющийся кусочно-постоянной функцией времени со значениями $a_0, a_1, ..., a_{N-1}$. На k-ом интервале решение задачи (4) есть функция:

$$x(t) = \left[x(t_k - 0) + c_k\right] e^{a_k(t - t_k)}\,, t_k \leq t < t_{k+1}. \tag{5}$$

В этой формуле $x(t_k - 0)$ является предельным значением решения $x(t)$ на предыдущем $(k-1)$-ом интервале $\left[t_{k-1}, t_k\right]$:

$$x(t_k - 0) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} x(t_k - \varepsilon).$$

Явную формулу для решения $x(t)$ уравнения (3) с переменным темпом $a = a(t)$ сразу для всех моментов $t \in [0,T]$ можно получить как частный случай более общих формул в работах [4, 5]. С помощью этих формул удобно анализировать динамику основных фондов предприятия в рамках модели с уравнением (3), а также решать оптимизационные задачи с линейными и нелинейными целевыми функциями, находя оптимальные значения импульсных инвестиций c_k и моментов t_k их поступления. Одну из таких задач мы рассмотрим ниже в п.4 для более общего случая корпорации предприятий.

2. Нелинейная модель с импульсными инвестициями со степенной производственной функцией типа Кобба-Дугласа.

Согласно [1] в случае степенной зависимости $p(t) = \gamma x^{\alpha}(t)$ выпуска p от объема фондов x типа Кобба-Дугласа $(0 < \alpha < 1)$ динамика фондов описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{a}(x(t))^{\alpha} + I'(t), \qquad (6)$$

где $I'(t)$ - интенсивность внешних инвестиций $I(t)$. Выбирая импульсный характер инвестиций, получаем уравнение $(0 \le t \le T)$

$$\frac{dx}{dt} = \bar{a}x^{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(t - t_k). \qquad (7)$$

Без импульсных воздействий $(c_k = 0 \; \forall k)$ решение уравнения (7) с неотрицательным начальным условием $x(0) = x_0$ есть функция

$$x(t) = \beta^{\frac{1}{\beta}} \left[\bar{a}t + \frac{x_0^{\beta}}{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta = 1 - \alpha. \qquad (8)$$

Для уравнения (7) в интервале времени $0 \le t < t_1$, где инвестиции еще не поступали, решение $x(t)$ имеет вид (8), где x_0 - объем фондов в начальный момент $t_0 = 0$. После поступления первой импульсной инвестиции объемом c_1 для фондов в момент t_1 в интервале времени $t_1 \le t < t_2$ решение уравнения (8) есть:

$$x(t) = \beta^{1/\beta} \left[\bar{a}t + q_1 \right]^{1/\beta}, \quad t_1 \le t < t_2. \qquad (9)$$

Здесь постоянная q_1 вычисляется из условия импульсного скачка
$x(t_1) = c_1 + x(t_1 - 0)$
и равна:

$$q_1 = \frac{1}{\beta} \left[\beta^{1/\beta} \left(\bar{a}t_1 + \frac{x_0^{\beta}}{\beta} \right)^{1/\beta} + c_1 \right]^{\beta} - \bar{a}t_1.$$

Аналогично решение $x(t)$ последовательно строится на интервалах $[t_2, t_3), [t_3, t_4)$ и т.д.

На рис.3 изображен график движения основных фондов $x(t)$ в модели с нелинейным уравнением (7) в случае ступенчатой функции инвестиций $I(t)$ с пятью скачками ($N = 5$), изображенной в нижней части рис.1 и рис.3.

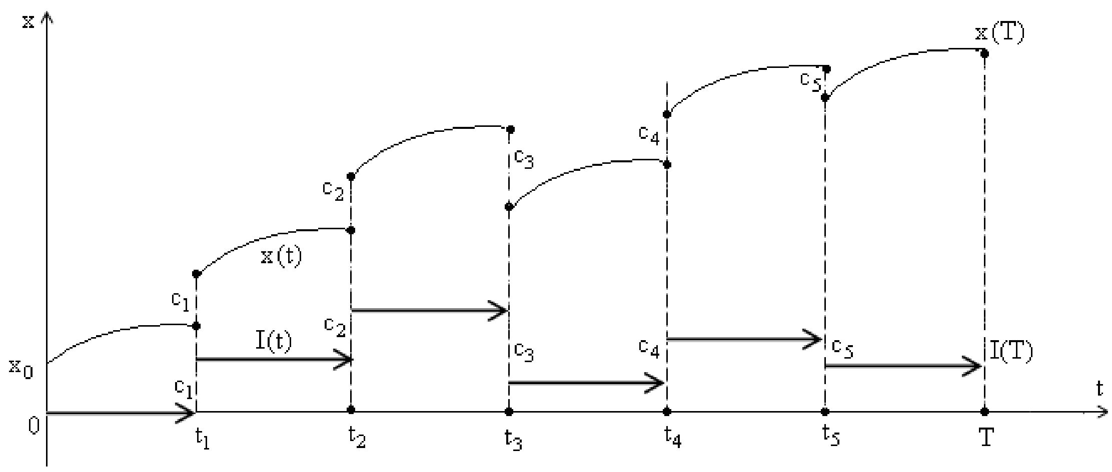

Рис.3. График основных фондов $x(t)$ в модели типа Кобба-Дугласа при импульсных инвестициях $I(t)$

Главное качественное отличие от графика $x(t)$ на рис.1 состоит в том, что непрерывные участки графика на рис.3 имеют не экспоненциальный, а степенной рост с показателем степени, меньшим единицы. При этом интенсивность (скорость) роста основных фондов (и производства) уменьшается со временем в каждом интервале $[t_{k-1}, t_k)$ между ближайшими поступлениями инвестиций, в то время как в линейной модели (3) соответствующая интенсивность роста фондов увеличивается.

3. Модель с ограничениями основных фондов.

В силу технических и финансово-экономических факторов на производственном предприятии может существовать верхняя граница P^+ объема выпуска $p(t)$ и соответственно верхняя граница X^+ производственных фондов $x(t)$:

$$0 < x(t) \le X^+ \quad , \forall t \ge 0. \tag{10}$$

В простейшей классической модели динамики из п.1 коэффициент a в уравнениях (1, 2) является постоянным и рост основных фондов $x(t)$ обеспечивается его положительностью: $a > 0$. Однако, рассматриваются переменные коэффициенты a в уравнении (1), например, $a = a(t)$ в [1]. Согласно (1) a есть относительная скорость роста фондов по отношению к их объему в момент времени t. Понятно, эта характеристика может зависеть от времени или объема фондов $x(t)$: $a = a(x(t))$. При такой точке зрения автономное функционирование предприятия в модели типа Кобба-Дугласа, описываемое уравнением (6) с $I'(t) \equiv 0$, имеет динамику фондов вида:

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \cdot x(t), \tag{11}$$

где $a(x) = \bar{a}x^{-\beta}$, $0 < \beta = 1 - \alpha < 1$.

Рассмотрим уравнение(11) с коэффициентом:

$$a(x) = a_0 \left[\frac{X^+}{x(t)} - 1 \right], \ a_0 > 0 \tag{12}$$

где X^+- верхняя грань для фондов $x(t)$(10). Фактически такое уравнение является линейным:

$$\frac{dx}{dt} = a_0 \left[X^+ - x(t) \right], a_0 > 0. \tag{14}$$

При начальном условии $x(0) = x_0 \ge 0$ оно имеет решение:

$$x(t) = X^+ - (X^+ - x_0)e^{-a_0 t}, t \ge 0 \tag{15}$$

При естественном ограничении начальных фондов $x_0 < X^+$ динамика фондов $x(t)$(15) такова: объем фондов монотонно растет и стремится к верхней грани X^+ при $t \to +\infty$ (см. рис.4.):

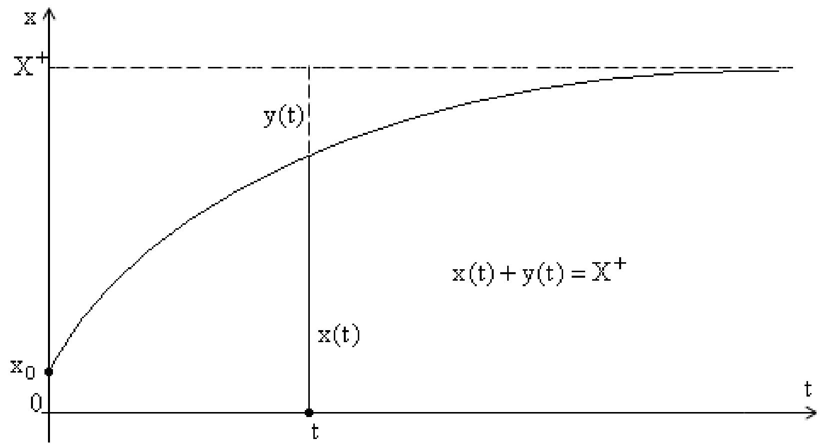

Рис.4. График основных фондов $x(t)$ (15)

Если функцию $y(t) = X^{+} - x(t)$ трактовать как нереализованный объем разрешенных фондов, то модельное уравнение динамики (12) означает следующее: отношение скорости роста фондов к нереализованному их объему является постоянной положительной величиной для всех моментов времени $t \geq 0$:

$$\frac{x'(t)}{y(t)} = a_0 > 0,\ \forall t \geq 0. \tag{16}$$

В случае внешних импульсных фондовых инвестиций в моменты t_k (см. п.1) уравнение динамики основных фондов $x(t)$ принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = a_0\left[X^{+} - x(t)\right] + \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(t - t_k). \tag{17}$$

На интервале $0 \leq t < t_1$ до поступления первой инвестиции решение $x(t)$ уравнения (17) совпадает с функцией (15) на этом интервале. Далее решение строится последовательно на интервалах $[t_1, t_2), [t_2, t_3), \ldots$, с учетом импульсных добавок c_k в соответствующие начальные условия задач на интервалах – как в п.1, 2. Процесс такого движения вдоль оси t продолжается до такого момента t^{+}, в котором оказывается, что $x(t^{+}) \geq X^{+}$. Знак строго неравенства $x(t^{+}) > X^{+}$ при условии $x(t^{+} - \varepsilon) < X^{+}$, $\forall \varepsilon > 0$ может реализовываться только, если t^{+}- момент импульсной инвестиции, и в этом случае ее следует использовать лишь частично.

В отсутствии фондовых изъятий при $t \geq t^{+}$ объем фондов $x(t)$ становится постоянным в силу ограничения (10) (см. рис.5):

$$x(t) = X^{+},\ t \geq t^{+}.$$

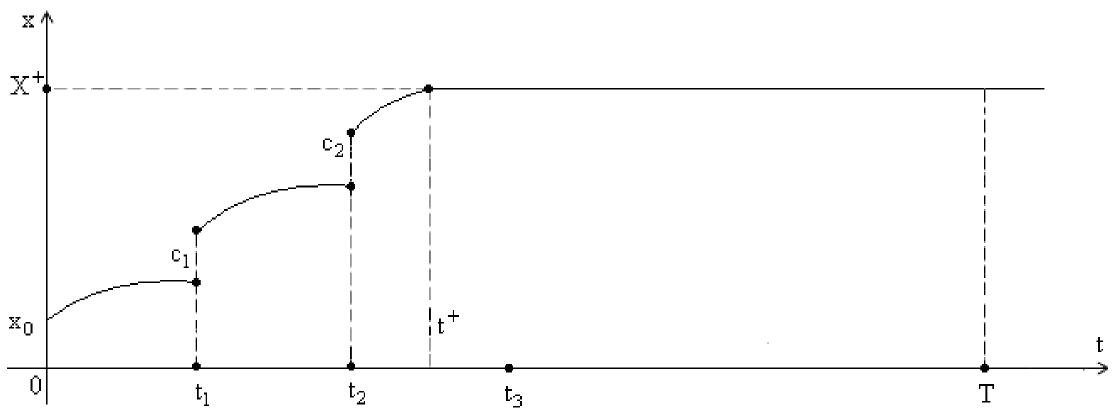

Рис.5. График движения фондов в случае ограничения их объема

Все импульсные инвестиции при $t_k > t^{+}$ являются излишними и уравнение (17) для производственных фондов $x(t)$ удовлетворяется только на конечном интервале $0 \leq t < t^{+}$.

4. Случай векторного уравнения динамики корпорации и оптимизация импульсных инвестиций.

Согласно работе [3] при чисто импульсных внешних инвестициях и производственно-кооперативных отношениях типа затраты-выпуск Леонтьева динамика корпорации n предприятий описывается одним из следующих векторных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(t - t_k), \tag{18}$$

$$\frac{d(Ax(t))}{dt}+Bx(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k\delta(t-t_k). \tag{19}$$

Здесь $x-n$-мерный вектор основных фондов предприятий, c_k- вектор объемов импульсных инвестиций на предприятиях в момент t_k; $B_0,A,B-$ $(n\times n)$-матрицы такие, что характеристический определитель $\det(\lambda A+B)$ тождественно не обращается в ноль. Матрица A под знаком производной в уравнении (19) возникает, например, в случае корпоративного перераспределения тех частей индивидуальных прибылей предприятий, которые предназначаются для реинвестирования. В [3] также показано, что уравнение типа (19) описывает динамику основных фондов предприятий при корпоративной релаксации (выравнивании) темпов роста отдельных предприятий, причем матрица A может зависеть от времени: $A=A(t)$. Если матрица A вырождена ($\det A=0$), то и методики и результаты решений уравнений (19) и (18) существенно различаются и более сложны в случае уравнения (19). Мы будем рассматривать случай более общего уравнения(19), из которого уравнение (18) получается как частный случай при единичной матрице $A(=E)$.

Будем рассматривать импульсные инвестиции как средство управления динамикой корпорации в целях оптимизации расходов на техническое обслуживание и поддержание основных производственных фондов, расходов на энергоносители, на получение и частичное погашение инвестиций и других расходов, суммарный объем которых дается нелинейным квадратичным функционалом J вида:

$$J=\int_0^T\left(Rx(t),x(t)\right)dt+\sum_{k=1}^{N}\left(F_kc_k,c_k\right). \tag{20}$$

Здесь $(u,v)=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-$ скалярное произведение в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$, R,F_k- положительно определенные $(n\times n)$-матрицы, $k=1,2,...,N$; $N-$ число импульсных векторных инвестиций c_k в моменты времени $t_1<t_2<...<t_N$, $0<t_1$, $t_N<T$. При известном объеме основных фондов в начальный момент решения $x(t)$ уравнений (18, 19) однозначно находятся по значениям моментов импульсов t_k и векторам c_k амплитуд импульсов, см. [4, 5]:

$$x(t)=G^{-1}\left[e^{Wt}q+\sum_{k=1}^{N}\chi(t-t_k)e^{W(t-t_k)}c_k\right]. \tag{21}$$

Здесь $G,W-$ матрицы, вычисляемые по коэффициентным матрицам A,B уравнения (19), $q-$ вектор в начальном условии:

$$Ax(0)=q, \tag{22}$$

такой, что $q\in A^p(R^n)$ при достаточно большой натуральной степени p. Для уравнения (18), то есть для частного случая единичной матрицы $A=E$, получается $G=E,W=-B=B_0$, начальное условие Коши $x(0)=q=x_0$ без каких-либо ограничений на начальный вектор $q=x_0$ и формула для решения:

$$x(t)=e^{B_0t}x_0+\sum_{k=1}^{N}\chi(t-t_k)e^{B_0(t-t_k)}c_k. \tag{23}$$

Функционал «потерь» (20) в конечном счете оказывается функцией от моментов времени t_k и амплитудных векторов c_k импульсных инвестиций:

$$J = J(t_1,...,t_N; c_1,...,c_N).$$

Рассматриваются две задачи минимизации квадратичного функционала потерь J (20) на решениях $x(t)$ уравнения (19).

Найти управляющие векторные амплитуды импульсных инвестиций $c_1^*,...,c_N^*$ («минимальное управление») и соответствующее им «минимальное» значение вектора основных фондов $x^*(t)$, при которых функционал J (20) имеет минимальное значение – при заданных фиксированных моментах t_k поступления инвестиций.

Найти $\min J(t_k, c_k)$ по свободным (любым) моментам $t_k (k=1,...,N)$ в интервале времени $0<t<T$ и любым амплитудным векторам инвестиций $R_1 = d_1 R;\ R_2 = d_2 R;\ d_1 + d_2 = 1; d_1, d_2 \geq 0$.

В [5] показано, что задача 1 имеет единственное решение – набор векторов d_1, описан алгоритм их нахождения и получения «минимальной» эволюции фондов d_2. Задача 2 имеет решение, которое не является единственным, соответствующий алгоритм также описан в [5].

Заключение. В рассмотренных четырех моделях получены явные формулы для решения динамических уравнений относительно объемов основных производственных фондов предприятий. Установлен характер замедления темпов роста в двух моделях с переменным показателем роста – в нелинейной модели с производственной функцией типа Кобба-Дугласа и модели с ограничением $NR_1 = (1-\tau)R_1;\ NR_2 = R_2 - L$ объема фондов $NR_1\ (NR_2)$ и постоянным отношением скорости роста фондов $L = I(\tau + P)R_2 D;$ к допустимому фондовому резерву $NR = NR_1 + NR_2$. В модели динамики корпорации предприятий при импульсных инвестициях описана задача минимизации квадратичного функционала потерь, где фактором управления являются величины (амплитуды) инвестиций в заданные моменты времени, либо амплитуды и сами моменты импульсных инвестиций. Результаты анализа моделей могут быть использованы в прогнозировании динамики и выборе плана развития производства предприятия или корпорации.

Литература

1. Хачатрян С.Р. Методы и модели решения экономических задач / С.Р.Хачатрян, М.В.Пинегина, В.П.Буянов – М.:Экзамен, 2005.-384 с.
2. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк. – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
3. Власенко Л.А. Математические модели динамики корпорации предприятий при использовании инвестирования / Л.А.Власенко, Ю.Г.Лысенко, А.Г.Руткас // Экономическая кибернетика. – 2009. - №5-6(59-60). – С.64-71.
4. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями / Л.А.Власенко. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006, 272 с.
5. Власенко Л.А. Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева / Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, А.М. Самойленко // Укр.мат.журнал. – 2008. – Т.60, №8. – С.1027-1034.
6. Бенсунан А. Импульсное управление и квазивариационные неравенства / А. Бенсунан, Ж.-Л.Лионс. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

1. Hachataryan S.R., Pinegina M.V., (2005), “Methods and models to solve economic problems”, Moscow.
2. Samoilenko A.M., Perestuk N.A., (1987), “Differential Equations with Impulsive”, Kiev.
3. Vlasenko L.A., Lysenko Yu.G, Rutkas A.G., (2009), “Mathematical models of the dynamics of corporate enterprises using investment”, Economicsl cybernetic, vol. 59-60, pp. 64-71.
4. Vlasenko L.A., (2006), “Evolutionary models with implicit and degenerate differential equations”, Dnipropetrovsk.
5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Samoilenko A.M., (2008), “Switching regulator problem for a dynamical system of Sobolev type”, Ukrainian material journal, vol. 60, pp. 1027-1034.
6. Bensunan A., J-L. Lions, (1987), “Impulse control and quasi-variational inequalities”, Moscow.