УДК 510.217

М.И. Медведева

канд. физ.-мат.наук, доцент,

Донецкий национальный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЛОГИСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕИДЕНТИЧНОЙ ПЕРЕНАЛАДКОЙ ОБОРУДОВАНИЯ

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важнейшими научными и практическими задачами.

Одной из основных проблем современной науки, техники и экономики является проблема повышения надежности работы обслуживающего оборудования. При этом под надежностью понимают способность обслуживающего устройства (оборудования) завершить поставленную задачу в соответствии в предъявленными требованиями в за установленный промежуток времени [1]. Необходимость повышения надежности производственного оборудования обусловлена тем, что ненадежное оборудование приводит к большим затратам на его обслуживание, простоям оборудования, срывам поставок заказов и т.д. Это влечет за собой недополучение предприятием прибыли и снижение его конкурентоспособности.

Увеличивающаяся сложность производственных систем, с одной стороны, приводит к снижению их надежности, но, с другой стороны, при практическом применении этих систем, наоборот, повышаются требования к надежности этих систем. Как известно, одним из путей повышения надежности сложной системы заключается в разработке оптимальных методов обслуживания этой системы в ходе ее эксплуатации [2]. В связи с этим, возникает достаточно широкий круг задач, связанных, как с созданием сложных технических систем, так и разработкой условий их функционирования, профилактическим обслуживанием в процессе эксплуатации, организацией и проведением ремонтных работ, заменой изношенного оборудования и др. При этом одной из основных задач является задача разработки математических моделей реальных технических и экономических систем, процесса их функционирования, технического и технологического обслуживания.

Следует отметить тот факт, что в настоящее время работа большинства предприятий организована по принципу гибких производственных систем и поэтому современная теория управления такими предприятиями уделяет большое внимание проблемам организации и контроля, как надежности функционирования производственного оборудования, так и вопросам хранения оптимального размера запасных частей или агрегатов. Кроме того, должны решаться задачи определения оптимально-необходимого числа обслуживающих бригад (или мастеров), рационального планирования профилактических работ и переналадке обслуживающего оборудования.

Следовательно, для того, чтобы обеспечить эффективное функционирование производства необходимо не только правильно организовать сам производственный процесс производства, но и правильно подобрать необходимый для этого обслуживающий персонал. При этом одной из основных функций оптимального управления производством является планирование и оптимизация загрузки оборудования с учетом его ремонта и переналадки. Это позволяет определить как потребности в оборудовании, так и в трудовых ресурсах [3].

Цель статьи. Получение основных характеристик функционирования и обслуживания производственной системы с ненадежным оборудованием и неидентичной переналадкой.

Основной материал исследования.

Для решения поставленной задачи гибкую производственную систему будем представлять в виде одноканальной системы массового обслуживания с переналадкой технологического оборудования после поступления заказов в свободную систему, которая, кроме того, в процессе своего функционирования может выходить из строя и восстанавливаться. В случае выхода оборудования из строя, выполняются ремонтные (восстановительные) работы. Обслуживание оборудования (восстановление, профилактика и переналадка) осуществляет одна бригада рабочих. Предполагаем, что прибор может выйти из строя в любой момент, как во время обслуживания заявок (в рабочем состоянии), причем заявка, находящаяся на обслуживание в момент выхода прибора из строя, теряется, так и в свободном состоянии. Заказы, которые находятся в системе в момент выхода оборудования из строя (если таковые имеются), обслуживаются после ремонта. После восстановления необходима переналадка оборудования, интенсивность которой отлична от интенсивности переналадки работающего оборудования.

Рассмотрим возможные состояния рассматриваемой системы с ненадежным оборудованием:

(0) – прибор свободен, но не готов к обслуживанию требований;

$(1,0)$ – прибор в рабочем состоянии и свободен (готов к обслуживанию заявок);

$(0,k)$ – прибор вышел из строя и находится на ремонте, в системе k $(k \ge 0)$ требований;

$(1,k)$ – прибор обслуживает очередную заявку и в системе k $(k \ge 1)$ требований;

$(0^*,k)$ – прибор на переналадке, в системе k $(k \ge 0)$ требований;

$(0^*,0,k)$ – прибор на переналадке после ремонта, в системе $k(k \ge 0)$ требований.

Граф состояний и переходов анализируемой системы представлен на рис. 1.

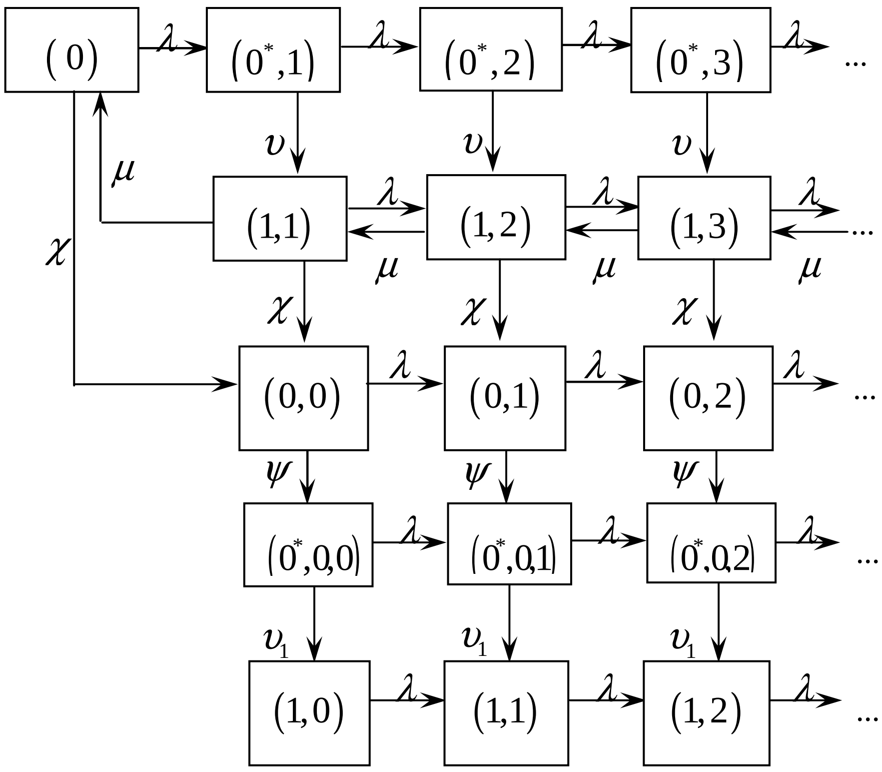

Рис. 1. Граф состояний и переходов

При составлении графа используются следующие обозначения:

$\lambda(\lambda > 0)$ – интенсивность простейшего входящего потока, т.е. вероятность того, что за промежуток времени $\Delta t(\Delta t \ge 0)$ на обслуживание поступит k заявок, вычисляется по формуле:

$$P_k(\Delta t)=\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t};$$

μ – параметр показательного закона распределения, которому подчиняется длительность обслуживания заявки;

υ – параметр показательного закона распределения, характеризующего длительность переналадки;

υ_1 – параметр показательного закона распределения, характеризующего длительность переналадки оборудования после восстановления;

ψ – параметр показательного распределения, характеризующего длительность восстановления оборудования;

χ – параметр показательного закона распределения, характеризующего момент выхода из строя оборудования.

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, который описывает состояние данной системы и задан на фазовом пространстве E, где

$$E=\left\{(0),(0,k),\left(0^*,0,k\right),(1,k),\ k\ge 0;\left(0^*,l\right),\ l\ge 1\right\}.$$

Введем стационарные вероятности состояний процесса $\xi(t)$:

$$P_0=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=(0)\right\};$$

$$P_{ik}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=(i,k)\right\},\ i=0,1,\ k\ge 0;$$

$$P_{0^*k}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=\left(0^*,k\right)\right\},\quad k\ge 0;$$

$$P_{0^*0k}=\mathrm{P}\left\{\xi(t)=\left(0^*,0,k\right)\right\},\quad k\ge 0.$$

Введенные вероятности состояний удовлетворяют следующим системам бесконечных алгебраических уравнений, составленных с помощью графа состояний и переходов, представленных на рис. 1.

$$\begin{cases}-(\lambda+\upsilon)P_{0^*1}+\lambda P_0=0,\\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*2}+\lambda P_{0^*1}=0,\\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*k}+\lambda P_{0^*,k-1}=0,\quad k\ge 2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\upsilon_1)P_{0^*00}+\psi P_{00}=0,\\ -(\lambda+\upsilon_1)P_{0^*01}+\lambda P_{0^*00}+\psi P_{01}=0,\\ -(\lambda+\upsilon_1)P_{0^*0k}+\lambda P_{0^*0,k-1}+\psi P_{0k}=0,\quad k\ge 2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\psi)P_{00}+\chi P_0+\chi P_{11}=0,\\ -(\lambda+\psi)P_{01}+\lambda P_{00}+\chi P_{12}=0,\\ -(\lambda+\psi)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\quad k\ge 2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\lambda P_{10}+\upsilon_1 P_{0^*00}=0,\\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{11}+\upsilon P_{0^*1}+\lambda P_{10}+\mu P_{12}+\upsilon_1 P_{0^*01}=0,\\ -(\lambda+\mu+\chi)P_{1k}+\upsilon P_{0^*k}+\lambda P_{1,k-1}+\mu P_{1,k+1}+\upsilon_1 P_{0^*0k}=0,\ k\ge 2.\end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\qquad \delta=\frac{\upsilon}{\mu},\qquad \delta_1=\frac{\upsilon_1}{\mu},\qquad \beta=\frac{\psi}{\mu},\qquad \gamma=\frac{\chi}{\mu}.$$

Тогда, разделив на μ обе части уравнений, выписанных выше систем, получим системы бесконечных уравнений вида

$$\begin{cases}-(\rho+\delta)P_{0^*1}+\rho P_0=0,\\ -(\rho+\delta)P_{0^*2}+\rho P_{0^*1}=0,\\ -(\rho+\delta)P_{0^*k}+\rho P_{0^*,k-1}=0,\qquad k\ge 2;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}-(\rho+\delta_1)P_{0^*00}+\beta P_{00}=0,\\ -(\rho+\delta_1)P_{0^*01}+\rho P_{0^*00}+\beta P_{01}=0,\\ -(\rho+\delta_1)P_{0^*0k}+\rho P_{0^*0,k-1}+\beta P_{0k}=0,\qquad k\ge 2;\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}-(\rho+\beta)P_{00}+\gamma P_0+\gamma P_{11}=0,\\ -(\rho+\beta)P_{01}+\mu P_{00}+\gamma P_{12}=0,\\ -(\rho+\beta)P_{0k}+\mu P_{0,k-1}+\gamma P_{1,k+1}=0,\qquad k\ge 2;\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}-\rho P_{10}+\delta_1 P_{0^*00}=0,\\ -(1+\rho+\gamma)P_{11}+\delta P_{0^*1}+\rho P_{10}+P_{12}+\delta_1 P_{0^*01}=0,\\ -(1+\rho+\gamma)P_{1k}+\delta P_{0^*k}+\rho P_{1,k-1}+P_{1,k+1}+\delta_1 P_{0^*0k}=0,\qquad k\ge 2.\end{cases}\tag{4}$$

Кроме того, несложно заметить справедливость равенства

$$-(\rho+\gamma)P_0+P_{11}=0.\tag{5}$$

Решения систем бесконечных алгебраических уравнений (1)-(4) позволяют найти ряд показателей надежности и эффективности работы ненадежного оборудования с неидентичной переналадкой.

Решение систем уравнений (1)-(4) (при условии справедливости равенства (5)) будем искать с помощью следующих производящих функций

$$a_0(z)=\sum_{k\ge 0}P_{0k}z^k,\ a_1(z)=\sum_{k\ge 0}P_{1k}z^k,\ a_{0^*}(z)=\sum_{k\ge 1}P_{0^*k}z^k,\ a_{0^*0}(z)=\sum_{k\ge 0}P_{0^*0k}z^k.$$

После умножения обеих частей уравнений систем (1) - (3) на z $\left(|z|\le 1\right)$ в соответствующей степени и суммирования по k, соответственно получим

$$(\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)=\rho z P_0,\tag{6}$$

$$(\rho+\delta_1-\rho z)a_{0^*0}(z)-\beta a_0(z)=0,\tag{7}$$

$$z(\rho+\beta-\rho z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=\gamma(zP_0-P_{10}),\tag{8}$$

$$\left(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta_1 z a_{0^*0}(z)+\delta z a_0^*(z)=(1-z-\gamma z)P_{10}+zP_{11}.\tag{9}$$

Дополнительно рассмотрим систему уравнений, составленную из первых уравнений систем (2), (3), (4) и уравнения (5):

$$\begin{cases} -(\rho+\delta_1)P_{0^*00}+\beta P_{00}=0, \\ -(\rho+\beta)P_{00}+\gamma P_0+\gamma P_{11}=0, \\ -\rho P_{10}+\delta_1 P_{0^*00}=0, \\ -(\rho+\gamma)P_0+P_{11}=0. \end{cases} \tag{10}$$

Найдем решение системы (10) относительно стационарных вероятностей P_{00}, P_{0^*00}, P_{10} и P_{11}.

Несложно показать, что

$$P_{00}=\frac{\gamma(1+\rho+\gamma)}{\rho+\beta}P_0,$$

$$P_{0^*00}=\frac{\beta\gamma(1+\rho+\gamma)}{(\rho+\delta_1)(\rho+\beta)}P_0,$$

$$P_{11}=(\rho+\gamma)P_0,$$

$$P_{10}=\frac{\delta_1\beta\gamma(1+\rho+\gamma)}{\rho(\rho+\delta_1)(\rho+\beta)}P_0$$

или

$$P_{10}=CP_0, \text{ где } C=\frac{\delta_1\beta\gamma(1+\rho+\gamma)}{\rho(\rho+\delta_1)(\rho+\beta)}. \tag{11}$$

Найденные значения P_{10} и P_{11} подставляем в равенства (8), (9). Тогда, после преобразований, соответственно получим, что

$$z(\rho+\beta-\rho z)\,a_0(z)-\gamma a_1(z)=\gamma(z-C)P_0, \tag{12}$$

и

$$\left(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta_1 z a_{0^*0}(z)+\delta z a_0^*(z)=\left[C(1-z-\gamma z)+z(\rho+\gamma)\right]P_0. \tag{13}$$

Для упрощения дальнейшего изложения, введем следующие обозначения

$$d_1(z)=z(\rho+\beta-\rho z); \qquad d_2(z)=\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1;$$
$$d_3(z)=\rho+\delta_1-\rho z; \qquad d_4(z)=C(1-z-\gamma z)+z(\rho+\gamma).$$

Из равенств (7), (12), (13) составим новую систему уравнений и найдем ее решение.

С учетом введенных выше обозначений, указанная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} d_3(z)a_{0^*0}(z)-\beta a_0(z)=0, \\ d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=\gamma(z-C)P_0, \\ d_2(z)a_1(z)+\delta_1 z a_{0^*0}(z)+\delta z a_0^*(z)=d_4(z)P_0. \end{cases} \tag{14}$$

Из системы уравнений (1) следует, что

$$a_0^*(z)=\frac{\rho z}{\rho+\delta-\rho z}P_0.$$

Тогда система (14) может быть представлена следующим образом

$$\begin{cases} d_3(z)a_{0^*0}(z)-\beta a_0(z)=0, \\ d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=\gamma(z-C)P_0, \\ d_2(z)a_1(z)+\delta_1 z a_{0^*0}(z)=d_5(z)P_0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$d_5(z)=C(1-z-\gamma z)+z(\rho+\gamma)-\frac{\delta\rho z^2}{(\rho+\delta-\rho z)}.$$

Несложно показать, что решение системы (15) имеет вид

$$a_0(z)=\frac{\gamma\left[d_3(z)d_5(z)+(z-C)d_2(z)\right]P_0}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\beta\delta_1\gamma z}, \tag{16}$$

$$a_1(z)=\frac{\left[d_1(z)d_3(z)d_5(z)-\beta\gamma(z-C)\right]P_0}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\beta\delta_1\gamma z}, \tag{17}$$

$$a_{0^*0}(z)=\frac{\beta\gamma\left[d_5(z)+(z-C)d_2(z)\right]P_0}{d_1(z)d_2(z)d_3(z)+\beta\delta_1\gamma z}. \tag{18}$$

Найденные значения производящих функций позволяют найти значение стационарной вероятности P_0. Для этого используются равенства (16)-(18), а так же условие нормировки:

$$P_0+a_0(1)+a_{0^*0}(1)+a_1(1)+a_0^*(1)=1. \tag{19}$$

Из системы (14) легко находим

$$a_1(z)=\frac{d_1(z)}{\gamma}a_0(z)-(z-C)P_0,$$

$$a_{0^*0}(z)=\frac{\beta}{d_3(z)}a_0(z).$$

Подставив выражения для производящих функций в условие нормировки, после преобразований получим

$$P_0\left(\frac{\rho}{\delta}+C\right)+\left(1+\frac{\beta(\gamma+\delta_1)}{\delta_1\gamma}\right)a_0(1)=1. \tag{20}$$

Откуда

$$P_0=\frac{\delta}{(\rho+C\delta)}\cdot\left(1-\frac{(\delta_1\gamma+\beta\gamma+\beta\delta_1)}{\delta_1\gamma}a_0(1)\right).$$

Таким образом, задача вычисления вероятности P_0 сведена к вычислению значения производящей функции $a_0(z)$ в точке $z=1$.

Можно показать, что

$$a_0(1)=\lim_{z\to1}a_0(z)=\frac{\delta_1\gamma\left(\delta(1+\gamma)+C\delta\rho+\rho^2\right)}{\delta\left[\delta_1\beta(1+\gamma)-\rho(\delta_1\gamma+\beta\gamma+\delta_1\beta)\right]}P_0.$$

Отсюда и условия нормировки (20) получаем

$$P_0=\frac{\delta}{(1+\gamma)}\cdot\frac{\delta_1\beta(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma(\delta_1+\beta)}{\delta_1\beta(1+\rho+\delta C)+\gamma(\delta_1+\beta)},$$

где

$$C=\frac{\delta_1\beta\gamma(1+\rho+\gamma)}{\rho(\rho+\delta_1)(\rho+\beta)}.$$

Таким образом, найдено значение P_0 – вероятности того, что прибор находится в состоянии «свободен – не готов».

Значение вероятности P_0 позволяет вычислить вероятности остальных состояний. В частности

вероятность того, что обслуживающее оборудование вышло из строя и в системе не заказов:

$$P_{00} = \frac{\gamma(1+\rho+\gamma)}{\rho+\beta} \cdot \frac{\delta}{(1+\gamma)} \cdot \frac{\delta_1\beta(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma(\delta_1+\beta)}{\delta_1\beta(1+\rho+\delta C)+\gamma(\delta_1+\beta)};$$

вероятность того, оборудование на переналадке после ремонта и в системе нет заказов:

$$P_{0^*00} = \frac{\beta\gamma(1+\rho+\gamma)}{(\rho+\delta_1)(\rho+\beta)} \cdot \frac{\delta}{(1+\gamma)} \cdot \frac{\delta_1\beta(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma(\delta_1+\beta)}{\delta_1\beta(1+\rho+\delta C)+\gamma(\delta_1+\beta)};$$

вероятность того, что оборудование выполняет заявку и одна заявка в очереди:

$$P_{11} = \frac{\delta(\rho+\gamma)}{(1+\gamma)} \cdot \frac{\delta_1\beta(1-\rho+\gamma)-\rho\gamma(\delta_1+\beta)}{\delta_1\beta(1+\rho+\delta C)+\gamma(\delta_1+\beta)}.$$

Для определения минимальных затрат, которые возникают в процессе эксплуатации ненадежного обслуживающего оборудования в классических моделях учитываются потери от простоя оборудования и содержания обслуживающих операторов [4].

В рассматриваемой в работе модели, необходимо дополнительно учесть издержки, связанные с переналадкой оборудования и простоем обслуживающей бригады, а так же потерей заявки, находящейся на обслуживание в момент выхода из строя. В нашем случае суммарные затраты C_0 в результате ненадежной работы обслуживающего оборудования могут быть вычислены по формуле:

$$C_0 = C_{пр.об}\left(P_{отк} + P_{пер1} + P_{пер2}\right) + C_{пр.бр}P_0 + C_{пот.заяв}P_{отк},$$

где $C_{пр.об}$ – затраты, связанные с простоем оборудования;

$C_{пр.бр}$ – затраты, связанные с простоем обслуживающей бригады;

$C_{пот.заяв}$ – затраты, связанные с потерей заявки в связи с выходом из строя оборудования;

$P_{рем}$ – вероятность выхода оборудования из строя;

$P_{пер1}$ – вероятность того, что оборудование находится на переналадке;

$P_{пер2}$ – вероятность того, что оборудование находится на переналадке после ремонта.

Таким образом, найденные в работе основные характеристики, могут быть использованы для управления прозводственно-экономической системой, описываемой с помощью рассмотренной одноканальной системы массового обслуживания.

Литература

1. Radio-Electronics-Television Manufacturers Association, 1955, Electronic. Applications Reliability Review, v. 3, № 1, May, p.18.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. Румянцев Н.В. Моделирование гибких производственно-логистических систем. – Донецк: ДонНУ, 2004. – 235 с.
4. Новиков О.А. Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. – М.: «Советское радио», 1969. – 400 с.

1. Radio-Electronics-Television Manufacturers Association, 1955, Electronic. Applications Reliability Review, v. 3, № 1, May, p.18.
2. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyov A.D., 1965. *Mathematical methods in reliability theory.* Moscow, Nayka. 524p.
3. Rumiancev N.V., 2004. *Modeling of flexible production and logistics systems.* Donetsk. DonNU. 235p.
4. Novikov O.A., Petuhov S.I., 1969. *Applied Problems of queuing theory.* Moscow, Soviet radio. 400p.