УДК 336.76

Т.М. Заболоцький
канд. екон. наук
О.В. Білий
канд. екон. наук
Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України;

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МІНІМІЗАЦІЇ VALUE-AT-RISK ТА РІВНЯ ДОХІДНОСТІ ПОРТФЕЛЯ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

Вступ

В умовах бурхливого розвитку фінансових ринків все частішими стали кризові явища в цій сфері діяльності. Остання світова фінансова криза стала однією з наймасштабніших в сучасній історії людства. Її негативні наслідки дотепер відчуваються у світовій економіці. Тому на перший план у фінансовій діяльності вийшли проблеми зменшення фінансових ризиків. З теорії та практики фінансової науки відомо, що одним з найвідоміших методів зниження фінансових ризиків є диверсифікація, яка вже стала класичним методом зниження загального ризику. Проте в результаті світової фінансової кризи цей напрямок отримав нові напрями розвитку.

На практиці диверсифікація реалізується шляхом побудови портфеля, наприклад, портфеля фінансових активів. З теорії відомо, що довільний розподіл коштів між активами, в чому і полягає побудова портфеля, призводить до зниження загального рівня ризику. З іншого боку, побудова портфеля повинна опиратися на певні критерії з метою досягнення мінімального рівня ризику при максимально можливому рівні доходу.

Вперше з наукової точки зору питання розподілу коштів між активами було розглянуте Марковіцем у 1952 році [1]. За основні характеристики портфеля було вибрано очікувану дохідність (математичне сподівання дохідності) та дисперсію (як міру ризику). Очевидно, найкращим за таких характеристик буде портфель з максимальною очікуваною дохідністю та мінімальною дисперсією. Отже, для побудови портфеля необхідно розглянути двокритеріальну оптимізаційну задачу, яка на практиці не завжди може бути розв'язана. З огляду на це, Марковіц запропонував розглядати задачу мінімізації дисперсії при обмеженій знизу очікуваній дохідності або задачу максимізації очікуваної дохідності при обмеженій зверху дисперсії. Виявляється обидві задачі є еквівалентними, а множина всеможливих розв'язків цих задач утворює так звану ефективну множину портфелів, яка містить усі портфелі для яких неможливо збільшити очікувану дохідність не збільшуючи ризик або, що еквівалентно, неможливо зменшити ризик не зменшуючи очікувану дохідність. Портфелі, які належать ефективній множині називаються ефективними. Аналітичне представлення ефективної множини було вперше отримане Мертоном в 1972 році [2]. Виявляється, що в просторі очікувана дохідність-дисперсія ефективна множина є параболою (верхньою віткою). Портфель, який є вершиною параболи ефективної множини, називається портфелем з найменшою дисперсією. Даний портфель є розв'язком задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації дисперсії. Зазначимо, що в теорії портфеля портфель з найменшою дисперсією відіграє важливу роль. Так, наприклад, в класичній теорії портфеля, очікувана дохідність та ризик цього портфеля є найменшими серед ефективних портфелів, тобто, не можливо побудувати ефективний портфель з меншою очікуваною дохідністю та взагалі не існує портфеля з меншою дисперсією.

Останні дослідження в теорії фінансових ризиків показали, що дисперсія як міра ризику, володіє рядом недоліків. Основними з цих недоліків є двостороннє сприйняття ризику та недостатня інформативність в загальному випадку. Тому, в практичній діяльності фінансових установ набула популярності квантильна міра ризику Value-at-Risk (надалі VaR). Дана міра ризику характеризується певним рівнем довіри, який прийнято позначати α. Загалом VaR при рівні довіри α дорівнює α-квантилі розподілу функції втрат, тобто найбільшим можливим втратам з імовірністю α. На практиці для рівня довіри вибирають значення з множини $\{0.9, 0.95, 0.99\}$. Основні властивості VaR досліджувалися в працях як закордонних [3]-[4], так і українських [5]-[6] вчених. Натомість, питання побудови портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR розглянуто в [7]. Статистичний аналіз ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR при різних припущеннях щодо поведінки дохідностей активів проведено в [8]-[9]. Зазначимо, що у вищенаведених працях основна увага приділялася лише питанню мінімізації VaR портфеля. Проте, очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем ризику може виявитися нижчою за потрібний інвестору рівень. Більше того, рівень очікуваного доходу портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не обов'язково повинен бути додатнім. Все це призводить до необхідності розгляду задачі мінімізації VaR портфеля з врахуванням очікуваної дохідності. Однією з можливостей такого підходу є вибір раціональної структури портфеля шляхом максимізації відношення Шарпа, в якому за міру ризику вибрано VaR. Даний підхід розглянуто в [10]. Зазначимо, що хоча цей підхід враховує обидві характеристики портфеля, проте не гарантує досягнення потрібного рівня очікуваної дохідності портфеля.

В роботі пропонується дослідити задачу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі критерію мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності, тобто задачу розглянуту в [7]-[9] з додатковою умовою на рівень очікуваної дохідності. Такий метод вибору структури портфеля є також важливий для практичних цілей як і безумовна мінімізація ризику, оскільки, наприклад, для планування діяльності фінансової установи необхідно не лише визначення мінімального рівня ризику, але й врахування рівня очікуваного доходу на наступний період. Тобто, обидві задачі є важливим для практичної діяльності. Виникає питання, чи можна звести задачу мінімізації VaR портфеля при заданому рівні дохідності до задачі безумовної мінімізації VaR портфеля.

Метою даної роботи є дослідження можливості зведення задачі мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності до задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля, визначення рівня довіри для VaR при якому очікувана дохідність портфеля отриманого з задачі безумовної мінімізації ризику портфеля буде дорівнювати наперед заданому рівню очікуваної дохідності, дослідження взаємозв'язку між рівнем очікуваної дохідності та рівнем довіри для VaR і дослідженню статистичних властивостей цього рівня довіри.

Теоретичні результати

Однією з основних характеристик фінансового активу є його ціна. Проте, у фінансовій математиці для аналізу зручніше використовувати похідні від ціни показники, такі як, наприклад, дохідність. Дохідність фінансового активу в момент часу t становить

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

де Pt – ціна фінансового активу в момент часу t. Статистичні властивості дохідності є більш привабливими для аналізу, оскільки дохідність не має часового тренду та її значення не є обмежені ні знизу ні зверху.

Нехай ми формуємо портфель з k активів. В нашій роботі ми припускаємо, що кількість активів в портфелі є наперед відомою. З практичної точки зору дане припущення є коректним, оскільки перш ніж вкладати кошти, інвестори, як правило, визначають множину активів для інвестування. Позначимо Xit дохідність i-ого активу в момент часу t. Через Xt=(X1t, X2t, …, Xkt)′ позначимо k-вимірний вектор дохідностей.

Припустимо, що Xt є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ. Припущення про нормальність дохідностей сприймається неоднозначно в наукових колах. Часто зазначається, що розподілам дохідностей з високою частотою, наприклад, щохвилинних дохідностей, притаманна наявність важких хвостів. З іншого боку, як зазначено в [11], припущення нормальності є повністю коректним для дохідностей з щомісячною частотою. Також, вплив важких хвостів можна знівелювати доброю диверсифікацією [4]. Крім того, для отримання теоретичних результатів дане припущення є повністю коректним.

Позначимо через wi – частку коштів інвестора вкладену в i-ий актив. Вектор w=(w1, w2, …, wk)′, складений з часток коштів інвестора вкладених в кожний з активів, назвемо портфелем фінансових активів. Позначимо дохідність портфеля w в момент часу t через Xwt, тоді очікувану дохідність портфеля можемо обчислити як Rw=M(Xwt)=μ′w, а дисперсію Vw=D(Xwt)=w′Σw.

В роботі за міру ризику нами вибрано VaR. Формально означити VaR при рівні довіри α ми можемо як такий рівень дохідності, що

P{Xwt<–VaRα}=1–α.

За припущення про нормальність розподілу дохідностей фінансових активів, що входять в портфель, VaR портфеля при рівні довіри α, Mw, дорівнює

$$M_{\mathbf{w}} = z_\alpha \sqrt{V_{\mathbf{w}}} - R_{\mathbf{w}},$$

де zα=–Φ-1(1–α) є α-квантилю стандартного нормального розподілу.

Класична задача мінімізації VaR портфеля має вигляд [7]-[9]

VaRα→min за умови, що i′w=1, (1)

де i – k вимірний вектор, елементами якого є одиниці. Розв’язок задачі (1) має наступний вигляд

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R\mu},$$

де $\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – ваги портфеля з найменшою дисперсією, $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – його дисперсія, $\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$, s=μ′Rμ. Характеристики портфеля з структурою wVaR мають вигляд

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}},$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV},$$

$$M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV},$$

де RVaR очікувана дохідність портфеля wVaR, VVaR – дисперсія, MVaR – VaR при рівні довіри α.

Як зазначалося вище, очікувана дохідність портфеля, структура якого отримана із задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації ризику не обов’язково задовольняє очікування інвестора, що пояснюється неможливість контролю за її значеннями. В такому випадку доцільніше розглядати наступну задачу

VaRα→min за умови, що i′w=1, Rw=R0, (2)

де R0 – бажаний рівень очікуваної дохідності портфеля з найменшим рівнем VaR.

Твердження 1. Нехай ми формуємо портфель з k цінних паперів. Позначимо Xt – k-вимірний вектор дохідностей в момент часу t. Припустимо, що Xt~Nk(μ, Σ). Тоді розв’язок задачі (2) має вигляд

$$\mathbf{w}_{VaR,\mathbf{A}} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_0 - R_{GMV}}{s}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Доведення. Неважко показати, враховуючи умову Rw=R0, що задача (2) є еквівалентна наступній задачі

Vw→min за умови, що i′w=1, Rw=R0. (3)

Задачу (3) може бути записана у вигляді

Vw→min за умови, що A′w=b, (4)

де матриця A розмірності k×2 та двовимірний вектор b мають вигляд

A=(i, μ), b=(1, R0)′. (5)

Розв’язок задачі (4) можна записати у вигляді [12]-[13]

wVaR,A=Σ-1A(A′Σ-1A)-1b. (6)

Підставляючи значення матриці A та вектора b з (5) в (6), внаслідок простих алгебраїчних перетворень отримаємо потрібне твердження. Крім того, як наслідок з результатів роботи [12], отримуємо, що портфель зі структурою wVaR,A належить ефективній, за Марковіцем, множині.

Зауважимо, що розв’язок задачі (2) не залежить від вибраного рівня довіри для VaR. Тобто, інвестору, який структуру портфеля фінансових активів формує на основі мінімізації VaR при заданому рівні очікуваної дохідності, не обов’язково строго задавати рівень довіри, достатньо вибрати довільне значення, наприклад, 0.95.

Характеристики портфеля зі структурою wVaR,A мають вигляд

$$R_{VaR,\mathbf{A}} = \mathbf{w}'_{VaR,\mathbf{A}}\boldsymbol{\mu} = R_0,$$

$$V_{VaR,\mathbf{A}} = \mathbf{w}'_{VaR,\mathbf{A}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR,\mathbf{A}} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s},$$

$$M_{VaR,\mathbf{A}} = z_\alpha \sqrt{V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}} - R_0 .$$

Отже, строго задати необхідний рівень довіри для VaR інвестору необхідно лише для обчислення ризику отриманого портфеля.

Як відзначено в [7], змінюючи значення рівня довіри α від 1 до найменшого, за якого задача (1) має сенс, можна отримати ефективну за Марковіцем, множину портфелів. Тому, існує такий рівень довіри αA для VaR при якому розв'язок задачі (1) співпадатиме з wVaR,A, причому з твердження 1 випливає, що αA не залежить від вибраного рівня довіри для VaR в задачі (2).

Теорема 1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо Xt – k-вимірний вектор дохідностей в момент часу t. Припустимо, що Xt~Nk(μ, Σ) і всі елементи вектора μ не є однаковими. Тоді розв'язок задачі (2) при довільному рівні довіри α для VaR та заданому рівні очікуваного доходу R0 співпадає з розв'язком задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля при рівні довіри

$$\alpha_{\mathbf{A}} = \Phi\left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s}\right), \tag{7}$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Доведення. Оскільки існує такий рівень довіри αA при якому розв'язок задачі безумовної мінімізації VaR портфеля співпадає з розв'язком задачі (2) при довільному рівні довіри α для VaR та заданому рівні очікуваного доходу R0, то повинні співпадати і дисперсії цих розв'язків, а саме $V_{VaR} = \frac{z_{\alpha_A}^2}{z_{\alpha_A}^2 - s} V_{GMV}$ та $V_{VaR,\mathbf{A}} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}$. Розв'язуючи рівняння

$$\frac{z_{\alpha_A}^2}{z_{\alpha_A}^2 - s} V_{GMV} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}$$

відносно αA отримаємо потрібне твердження.

Емпіричні результати

Ми показали, що інвестор, який використовує мінімізацію VaR для вибору раціональної структури портфеля фінансових активів має можливість використати цей метод і для вибору структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем ризику та з наперед заданим рівнем очікуваного доходу. Для цього йому необхідно лише змінити рівень довіри для VaR за правилом, описаним в теоремі 1. Проте, такий підхід не може бути використаний на практиці, оскільки параметри розподілу дохідностей μ та Σ є невідомими. Тому, необхідним є спочатку певним чином оцінити ці параметри. Існує декілька методів оцінки невідомих параметрів розподілу та найвідомішим є історичний метод. Цей метод полягає у побудові так званих вибіркових оцінок невідомих параметрів на основі вибірки попередніх значень векторів дохідностей фінансових активів X1, X2,…Xn

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i , \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})' . \tag{8}$$

Підставивши оцінки (8) у вираз для обчислення рівня довіри (7) інвестор визначить рівень довіри при якому портфель з найменшим рівнем VaR матиме необхідний рівень очікуваного доходу. Позначимо цей рівень довіри $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$. Зауважимо, що вибіркові оцінки є випадковими величинами, тому випадковою величиною є також рівень довіри $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$.

Для того, щоб обґрунтувати можливість переходу від задачі (2) до задачі (1) при виборі раціональної структури портфеля фінансових активів, потрібно дослідити статистичні властивості оцінки $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$. Для цього ми припустимо, що значення параметрів розподілу дохідностей μ та Σ є відомими. Використовуючи ці значення як основу для побудови вибірки, ми згенеруємо вибірку обсягом n (значення виберемо, наприклад, 60, 120, 250, 500 та 1000) та знайдемо значення $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$. Провівши даний експеримент, наприклад, 106 раз, зобразимо графічно залежність оцінки $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$ від заданого рівня очікуваного доходу та обчислимо основні характеристики цієї оцінки (математичне сподівання та дисперсію).

За відомі значення для параметрів μ та Σ приймемо вибіркові оцінки отримані з вибірки історичних щомісячних значень про ціни семи акцій компаній, що входять до індексу Dow Jones (Microsoft, JPMorgan Chase, Coca-Cola, Walt Disney, Boeing, ExxonMobil, Nike) за період часу від 01.2009 до 12.2013, а сааме

$$\mu=(1.32688, 1.40613, -0.05689, 2.10692, 1.98513, 0.47469, 0.93674)',$$

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix} 44.108 & 30.923 & 4.153 & 20.422 & 21.655 & 12.335 & 16.887 \\ 30.923 & 80.907 & 10.153 & 33.746 & 39.858 & 21.610 & 16.248 \\ 4.153 & 10.153 & 120.154 & 4.530 & 19.073 & 8.035 & 12.071 \\ 20.422 & 33.746 & 4.530 & 26.145 & 26.297 & 12.325 & 25.596 \\ 21.655 & 39.858 & 19.073 & 26.297 & 63.881 & 16.638 & 25.103 \\ 12.335 & 21.610 & 8.035 & 12.325 & 16.638 & 23.602 & 8.266 \\ 16.887 & 16.248 & 12.071 & 25.596 & 25.103 & 8.266 & 121.665 \end{pmatrix}.$$

При таких значеннях параметрів найменша очікувана дохідність ефективного портфеля (портфеля з найменшою дисперсією) становить 1.21, а дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 – 1.6. Отже, вибравши структуру портфеля, що співпадає з портфелем найменшої дисперсії інвестор очікує на 1.21% доходу щомісяця, або 14.52% річних. При виборі портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 очікувана щомісячна дохідність становитиме 1.6%, а річна – 19.2%.

Дослідимо залежність значень рівня довіри від рівня очікуваної дохідності портфеля. На рис. 1 зображено значення рівня довіри αA при різних значеннях рівня очікуваної дохідності, який змінюється від 1.21 до 2.5 (30 % річних). При значеннях очікуваної дохідності близьких до 1.21 значення рівня довіри є не сильно чутливими до зміни значень дохідності. При зростанні значень очікуваної дохідності від 1.4 до 2.5 значення рівня довіри швидко спадають, а після точки 2.5 швидкість спадання зменшується. Дані спостереження наштовхують на думку, що значення рівня довіри αA можна розглядати як суб’єктивний показник ставлення до ризику, зміна якого слабко чутлива до зміни значень очікуваної дохідності при відносно низьких та відносно високих її значеннях, проте чутлива при середніх значеннях очікуваної дохідності.

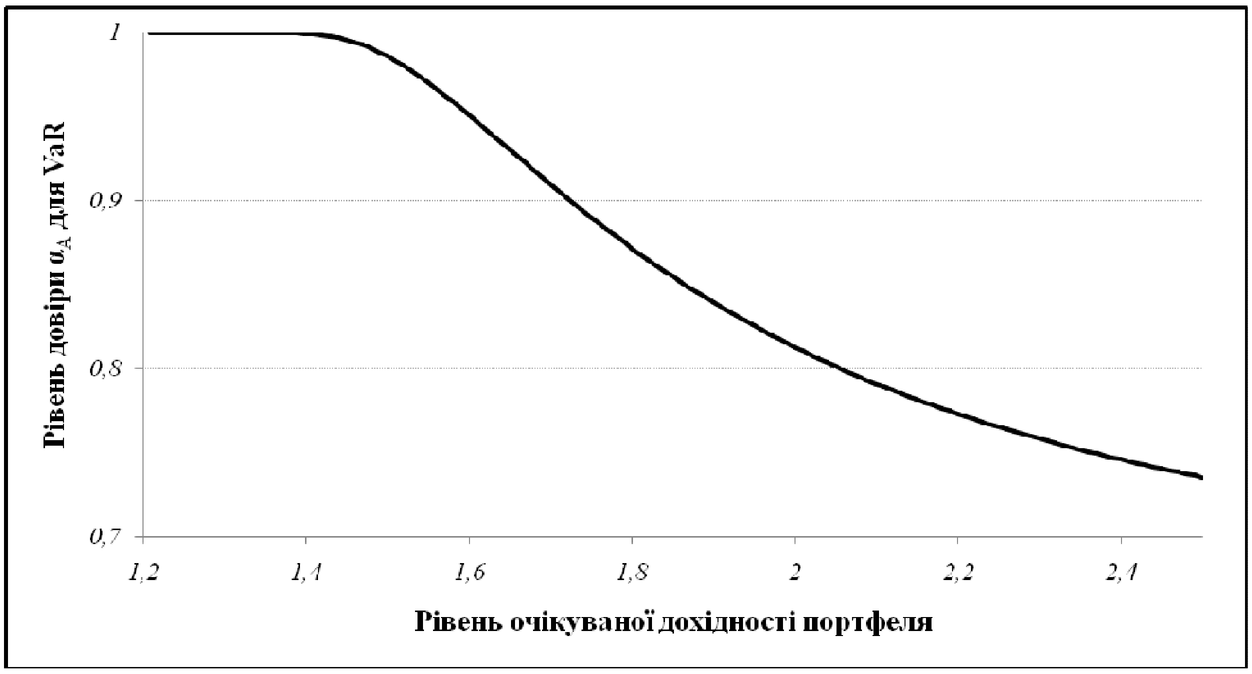

Рис. 1. Залежність значень αA від рівня очікуваної дохідності

Нехай інвестор зацікавлений в портфелі фінансових активів з найменшим ризиком при рівні доходу 20% річних. Тоді в формулювання задачі (2) нам потрібно взяти R0=1.67. За таких вхідних даних точне значення для αA становить 0.922. Дослідимо точність вибіркової оцінки $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$ за таких умов. Для цього, обчислимо середні та дисперсії оцінки $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$ при різних значеннях n (табл. 1).

Таблиця 1.

Середні значення та дисперсії $\hat{\alpha}_{SR}$

Обсяг вибірки n	Середнє	Дисперсія
60	0.9291	0.008667
120	0.9257	0.007868
250	0.9242	0.006154
500	0.9239	0.004348
1000	0.9238	0.002798

Результати отримані в таблиці 1 дають підстави стверджувати, що вибіркова оцінка $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$ рівня довіри αA є доволі точною навіть при невеликих обсягах вибірки, а, отже, може бути використана на практиці для вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR та необхідним (наперед заданим) рівнем очікуваної дохідності.

Висновки

Робота присвячена дослідженню можливості вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR при заданому рівні очікуваної дохідності на основі критерію безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR. Показано, що структура портфеля отриманого шляхом мінімізації VaR при заданому рівні очікуваної дохідності не залежить від вибраного рівня довіри, тобто такий метод є еквівалентним методу мінімізації дисперсії портфеля при додаткових лінійних обмеженнях [12]. Використовуючи результати отримані в [12] знайдено структуру портфеля з найменшим ризиком при заданому рівні очікуваної дохідності та як наслідок з теореми 1 з [12] отримано, що портфель з такою структурою є ефективним за Марковіцем. Враховуючи це, та той факт, що довільний ефективний, за Марковіцем, портфель може бути отриманий шляхом мінімізації VaR портфеля при певному рівні довіри [7], існує такий рівень довіри αA для VaR при якому очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR буде дорівнювати потрібному значенню.

У роботі знайдено аналітичний вираз для обчислення αA. Зауважимо, що у вираз входять параметри розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель, μ та Σ, які на практиці є невідомими. Для вирішення практичних задач інвестор змушений використовувати оцінки цих параметрів. Найпоширенішими оцінками параметрів розподілу є вибіркові оцінки, які в загальному випадку є випадковими величинами. Тому, випадкової величиною буде також вибіркова оцінка $\hat{\alpha}_{\mathbf{A}}$ параметра αA. З метою перевірки можливості використання цієї оцінки на практиці ми, на основі вибірки історичних щомісячних значень про ціни семи акцій компаній, що входять до індексу Dow Jones (Microsoft, JPMorgan Chase, Coca-Cola, Walt Disney, Boeing, ExxonMobil, Nike) за період часу від 01.2009 до 12.2013 дослідили її точність. На основі методу Монте-Карло, ми отримали, що вибіркова оцінка є досить точною навіть за невеликого обсягу вибірки. Також, показано, що значення рівня довіри αA можна розглядати як суб’єктивний показник ставлення до ризику.

Отже, метод вибору структури портфеля шляхом мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності можна замінити на більш універсальний метод безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля при рівні довіри αA.

Literature

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – No 7. – P. 77–91.
2. Merton R. C. An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // Journal of financial and quantitative analysis. – 1972. – No 7. – P. 1851–1872.
3. Jorion P. Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk / P. Jorion. – New York: McGraw-Hill Professional, 2002. – 544 p.
4. Duffie D. An overview of Value-at-Risk / D. Duffie, J. Pan // Journal of derivatives. – 1997. – P. 7-49.
5. Вітлінський В.В. Комплексний підхід застосування методології Value-at-Risk / В.В. Вітлінський, А.Б. Камінський // Економічна кібернетика. – 2004. – № 5-6. – С. 4-14.
6. Камінський А.Б. Моделювання ставлення до ризику при застосуванні методології Value-at-Risk / А.Б. Камінський // Теоретичні та прикладні питання економіки: Зб. наук. пр. – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2005. – Випуск 6. – С. 145-154.
7. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – No 26. – P. 1159–1193.
8. Bodnar T. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistics & risk modeling. – 2012. – No 29. – P. 281-314.
9. Bodnar T. Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Metrica. – 2013. – №76. – P. 1105–1134.
10. Боднар Т.Д. Максимізація відношення Шарпа портфеля фінансових активів у контексті мінімізації ризику /Т.Д. Боднар, Т.М. Заболоцький // Економічний часопис – XXI. – 2013. – No 11-12(1). – С. 110-113.
11. Fama E.F. Foundations of finance / E.F. Fama. – New York: Basic Books. 1976. – 391 p.
12. Заболоцький Т.М. Portfolio choice problem with the Value-at-Risk utility function under general linear constraints / Т.М. Заболоцький, Т.Д. Боднар, В.В. Вітлінський // Економічна кібернетика. – 2012. – No 4-6(76-78). – С. 4-11.
13. Mori H. Finite sample properties of estimators for the optimal portfolio weights / H. Mori // Journal of the Japan statistical society. – 2004. – 35. – P. 27-46.

1. Markowitz H., 1952. Portfolio selection. Journal of finance. № 7. pp. 77–91.
2. Merton R.C., 1972. An analytical derivation of the efficient frontier. Journal of financial and quantitative analysis. No 7. pp. 1851–1872.
3. Jorion P., 2002. Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk. New York: McGraw-Hill Professional, 544 p.
4. Duffie D., Pan J., 1997. An overview of Value-at-Risk. Journal of derivatives. — pp. 7-49.
5. Vitlinskyy V.V., Kaminsky A.B., 2004. Comprehensive approach the application of the methodology Value-at-Risk. Economic Cybernetics. № 5-6. pp. 4-14.
6. Kaminsky A.B., 2005. Modeling attitude to risk when applying the methodology Value-at-Risk. Theoretical and applied economic issues: Coll. Science. pr. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Issue 6. - pp. 145-154.
7. Alexander G.J., Baptista M.A., 2002. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis. Journal of economic dynamics & control. No 26. pp. 1159–1193.
8. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T., 2012. Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests. Statistics & risk modeling. No 29. pp. 281-314.
9. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T., 2013. Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data. №76. pp. 1105-1134.
10. Bodnar T.D., Zabolotskii T.N., 2013. Sharpe ratio maximization portfolio of financial assets in the context of minimizing the risk. Economic Journal. No 11-12 (1). - pp. 110-113.
11. Fama E.F., 1976. Foundations of finance. – New York: Basic Books.. – 391 p.
12. Zabolotskyy T.M., 2012. Portfolio choice problem with the Value-at-Risk utility function under general linear constraints. Economical Cybernetics. No 4-6(76-78). pp. 4-11.
13. Mori H., 2004. Finite sample properties of estimators for the optimal portfolio weights. Journal of the Japan statistical society. pp. 27-46.